

Novi prilaz projektovanju diskretnih regulatora sa kliznim režimom i kompenzacijom poremećaja

Čedomir Milosavljević
Elektrotehnički fakultet
Univerzitet u Istočnom Sarajevu
Bosna i Hercegovina
cedomir.milosavljevic@elfak.ni.ac.rs

Boban Veselić
Elektronski fakultet, Katedra za automatiku
Univerzitet u Nišu
Niš, Srbija
boban.veselic@elfak.ni.ac.rs

Sažetak - Predložen je nov način projektovanja diskretnih regulatora primenom teorije kliznih režima sa kompenzacijom poremećaja na osnovu nominalnog modela objekta, za sisteme sa poremećajima koji deluju u kanal upravljanja. Polazeći od poznate metode estimacije poremećaja kod diskretnih sistema i koristeći originalni način projektovanja kliznih režima, u radu je izvršena potpuna integracija ovih prilaza u jedinstveni algoritam, umesto njihove koordinacije kao dva posebna algoritma. Osim toga, dobijeni algoritam upravljanja se, kod sistema sa većom frekvencijom odabiranja, dodatno uprošćava i eksplicitno ne zavisi od ekvivalentnog upravljanja, već samo od klizne (prekidačke) funkcije. Način projektovanja i osobine predloženog rešenja se ilustruju na primeru pozicionog servosistema. Simulacijom se prikazuju uporedni rezultati sa drugim prilazima u projektovanju servosistema.

Ključne reči – estimacija poremećaja; diskretni klizni režimi; servosistemi.

I. UVOD

Tri su osnovna zahteva u projektovanju visokokvalitetnih sistema automatskog upravljanja: (i) ostvarivanje zahtevane tačnosti praćenja referentne vrednosti; (ii) dostizanje zadatog stanja željenom brzinom i (iii) robusnost na poremećaje koji nastaju spolja (od opterećenja) ili u samom objektu upravljanja (promena parametara). Poremećaji koji deluju na objekat mogu se klasifikovati na poremećaje koji deluju isključivo preko kanala upravljanja (uvek je slučaj kod dinamičkih objekata prvog reda), na poremećaje koji deluju van kanala upravljanja i na poremećaje kombinovanog tipa. U ovom radu se razmatraju objekti sa poremećajima prvog tipa. Tada se kaže da oni ispunjavaju *uslove poklapanja* (engl.: *matching conditions*). Upravljanje takvim objektima primenom kliznih režima sa kontinualnom obradom informacije dovodi do potpune invarijantnosti sistema na poremećaje [1]. Međutim, diskretizacija kontinualnih kliznih algoritama dovodi do gubitka idealnog klizanja. Tada nastaje kvaziklizni režim [2] i, zbog kašnjenja u obradi informacija, izaziva haotično cik-cak kretanje oko zadate klizne trajektorije, što stvara neželjeno treperenje (engl. *chattering*), odnosno vibracije kod elektromehaničkih objekata, te izaziva habanje prenosnih elemenata (zupčanika, ležita, nosača). Algoritmi koji u većoj meri otklanjaju navedeni četering bazirani su na realizaciji tzv. idealnog diskretnog

kliznog režima primenom ekvivalentnog upravljanja [3] - [6]. Ovi algoritmi, kod nominalnog sistema, drže stanje, u trenucima odabiranja, tačno na zadatoj kliznoj površi. To znači da će, kod kontinualnog objekta, stanje van trenutaka odabiranja biti van klizne površi, što opet implicira da se ne radi o stvarnom već o kvazikliznom režimu, ali kvalitetnijem od prethodnog, kada se vrši diskretizacija kontinualnih kliznih algoritama. Treći prilaz u projektovanju diskretnih kliznih režima zasniva se na namernom uvođenju cik-cak kretanja oko zadate klizne površi [7], pri čemu se posebno zahteva da se klizna površ preseca u svakom koraku odabiranja. To, takodje, implicira determinisani četering. Neke metode odstupaju od obaveznog presecanja klizne površi u svakoj periodu odabiranja [8], što ublažava četering. Predložene su i metode koje kontinualne algoritme prevode u diskretne bez izraženog četeringa na osnovu implicitne realizacije signum funkcije [9], [10].

Ono što karakteriše sve diskretne metode realizacije kvazikliznog režima je gubitak invarijantnosti usled delovanja poremećaja, jer poremećaji ne podležu diskretizaciji. Dakle, diskretni klizni režimi nisu invarijantni, ali poseduju izvesnu robusnost. U cilju poboljšanja robusnosti, predloženo je više mogućnosti: povećanje frekvencije odabiranja (što je manja perioda odabiranja, sistem je bliže kontinualnoj varijanti), uvođenje dodatne prekidačke komponente na ekvivalentno upravljanje koje definiše idealni diskretni klizni režim (što uvodi dodatni četering), adekvatniji izbor prekidačke funkcije [11], uvođenje estimatora poremećaja za kompenzaciju istog.

U ovom radu se akcenat stavlja na primeni estimatora poremećaja baziranog na nominalnom modelu upravljanog objekta, koji estimira poremećaj sa kašnjenjem od jedne periode diskretizacije i njegova implementacija u sistem sa diskretnim kliznim režimom na bazi primene ekvivalentnog upravljanja. Pored toga, daje se i kratak osvrt na estimator baziran na integralu signala prekidačke funkcije.

Osnovni doprinos rada je u integraciji estimatora poremećaja u sam algoritam projektovanja diskretnih kliznih režima [12]. Kao poseban rezultat je pojednostavljenje algoritma za sisteme sa većom frekvencijom odabiranja. Dati prilaz generiše novi način projektovanja diskretnih servosistema, u kojima ekvivalentno upravljanje ne učestvuje eksplicitno. Dati prilaz biće ulustrovan na pozicionom servosistemu.

Rad je organizovan na sledeći način. U drugom odeljku se navode poznati rezultati koji čine osnovu predloženog algo-

ritma. Najpre se daju dve metode estimacije poremećaja. Prva se zasniva na nominalnom modelu sistema i može se primeniti za sve tipove diskretnog upravljanja. Druga metoda koristi integral klizne funkcije, a primenljiva je samo za sisteme sa diskretnim kliznim režimom. U nastavku se daje originalna metoda projektovanja upravljanja sistema sa kliznim režimima. U trećem odeljku je opisan metod integracije estimatora poremećaja u diskretni algoritam upravljanja kliznim režimom i njegova modifikacija za sisteme sa većim frekvencijama odabiranja. Četvrti odeljak je posvećen projektovanju servosistema, gde se simulacijom vrši upoređenje sa drugim postupcima u projektovanju servosistema. Rad se završava zaključcima i spiskom referenci na koje se rad oslanja.

II. PRELIMINARNA RAZMATRANJA

Dat je linearni vremenski invarijantan linearni objekat upravljanja opisan dinamičkim modelom u vremenski kontinualnom domenu sa:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{D}\mathbf{f}(t), \quad (1)$$

gde su: $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ - merljivi vector stanja objekta, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ i $\mathbf{f}(t) \in \mathbb{R}^l$ su upravljanje i poremećaj, respektivno, \mathbf{A} , \mathbf{B} i \mathbf{D} su konstantne matrice odgovarajućih dimenzija. Pretpostavlja se da poremećaj deluje isključivo preko kanala upravljanja, tj. da ispunjava tzv. uslove poklapanja [1]:

$$\text{rank}([\mathbf{B} \ \mathbf{D}]) = \text{rank}(\mathbf{B}). \quad (2)$$

i da je ograničen: $|\mathbf{f}(t)| \leq \mathbf{f}_0 < \infty$; $|\dot{\mathbf{f}}(t)| < \infty$.

Diskretna realizacija (1), periodom diskretizacije T , dovodi do modela ($\mathbf{x}(kT) \equiv \mathbf{x}_k, k \in N$):

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_d\mathbf{x}_k + \mathbf{B}_d\mathbf{u}_k + \mathbf{v}_k, \quad (3)$$

gde su: $\mathbf{A}_d = e^{\mathbf{A}T}$; $\mathbf{B}_d = \int_0^T e^{\mathbf{A}\tau} d\tau \mathbf{B}$,

$$\mathbf{v}_k = \int_0^T e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{D}\mathbf{f}(k+1)T - \tau) d\tau.$$

A. Metode estimacije poremećaja

U ovom paragrafu pokazaćemo dve jednostavne metode estimacije poremećaja u digitalnim sistemima upravljanja. Prva metoda je univerzalna, jer se može primeniti na bilo koji digitalni sistem upravljanja, dok je druga isključivo vezana za digitalne sisteme sa kliznim režimom. Obe metode estimiraju poremećaj sa kašnjenjem od jedne periode diskretizacije.

A1. Prva metoda estimacije

Zasniva na digitalnom modelu nominalnog objekta upravljanja (1) iskazanom relacijom (3), a u diskretnim kliznim režimima je prvi put primenjena u [5].

Sistem (3) se može napisati u ekvivalentnom obliku

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}_d\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}_d\mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{v}_{k-1}, \quad (4)$$

odakle je:

$$\mathbf{v}_{k-1} = \mathbf{x}_k - \mathbf{A}_d\mathbf{x}_{k-1} - \mathbf{B}_d\mathbf{u}_{k-1}, \quad (5)$$

uz napomenu da \mathbf{v}_k , u opštem slučaju, ne zadovoljava uslove poklapanja (2). Medjutim, ako je perioda diskretizacije T dovoljno mala, komponenta poremećaja koja ne zadovoljava uslove poklapanja je zanemarljiva u odnosu na komponentu koja ih ispunjava, što ćemo nadalje pretpostavljati. U tom slučaju je $\mathbf{v}_k = \mathbf{B}_d\mathbf{d}_k$, i (3) se može napisati u obliku

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_d\mathbf{x}_k + \mathbf{B}_d(\mathbf{u}_k + \mathbf{d}_k). \quad (6)$$

Uvodjenjem estimirane vrednosti $\mathbf{v}_{k-1} = \mathbf{B}_d\mathbf{d}_{k-1}$ u (6) sa suprotnim znakom u odnosu na \mathbf{d}_k dobija se

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_d\mathbf{x}_k + \mathbf{B}_d(\mathbf{u}_k + \mathbf{d}_k - \mathbf{d}_{k-1}). \quad (7)$$

Ako poremećaj zadovoljava navedene uslove (da je neprekidan i ograničen), $\mathbf{d}_k - \mathbf{d}_{k-1}$, kao nekompenzovani ekvivalentni poremećaj je reda $O(T^2)$ [5].

A2. Druga metoda estimacije

Zasniva se na činjenici da se poremećaj, koji ispunjava (2), direktno odslikava, sa kašnjenjem od jedne periode odabiranja, u kliznoj funkciji, dostupnoj za merenje. Medjutim, za razliku od prve metode estimacije, mereni signal se ne može direktno dodati upravljanju radi kompenzacije poremećaja, već se mora dodatno procesirati integraljenjem. To asocira na klasično uvodjenje proporcionalno-integralnog (PI) upravljanja u kanal signala greške sistema, pri čemu se, umesto signala greške, koristi signal klizne funkcije, koja je linearna kombinacija koordinata stanja sistema. O ovom prilazu nešto više u sledećem odeljku, posle uvodjenja osnovnih pojmova o kliznim režimima u diskretnim sistemima.

B. Diskretni klizni režimi sa ekvivalentnim upravljanjem

Sada ćemo prikazati primenu ovih kompenzacija za projektovanje sistema sa konvencionalnim diskretnim kliznim režimima (kliznim režimima prvog reda) na osnovu metode ekvivalentnog upravljanja prema [3] – [5], [13].

Sistemu (3) pridružuje se jednačina klizne funkcije s definisana sa:

$$\mathbf{s}_k = \mathbf{C}_d\mathbf{x}_k = 0, \quad \mathbf{C}_d \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad (8)$$

koja određuje kliznu površ, na kojoj treba ostvariti diskretni klizni režim. Dakle, pri projektovanju se, najpre, određuje klizna funkcija (8) koja definiše kretanje sistema u režimu klizanja na osnovu spektra željenih sopstvenih vrednosti (polova) sistema. U kontinualnom sistemu, upravljanje koje realizuje klizni režim se sastoji iz dve komponente: komponente dosezanja klizne površi i komponente klizanja. Komponenta dosezanja je prekidna funkcija tipa $\alpha \text{sign}(\mathbf{s})$, gde je α dijagonalna matrica sa pogodno izabranim elementima, a komponenta kliznog režima je ekvivalentno upravljanje koje se određuje iz uslova zadovoljenja dinamičkih osobina sistema u kliznom režimu. U nenominalnom sistemu α zavisi i od apsolutne vrednosti poremećaja. Kod diskretnog sistema, u

nominalnim uslovima, ekvivalentno upravljanje obezbeđuje kako doseganje tako i klizanje [3], t.j. upravljanje je jedinstveno, što nije slučaj kod kontinualnih sistema. Međutim, u nenominalnim uslovima potrebno je, radi kompenzacije poremećaja, uvesti komponentu prekidnog upravljanja i u diskretni sistem. Ali, ako je prethodno uvedena kompenzacija poremećaja, komponenta prekidnog upravljanja ima mnogo manju amplitudu (pokriva samo $\mathbf{d}_k - \mathbf{d}_{k-1}$). Time se smanjuje četering. U praksi često i nije ni potrebno prekidno upravljanje. Ekvivalentno upravljanje, uz kompenzaciju poremećaja, obezbeđuje potrebne osobine sistema: brz odziv, visoku statičku i dinamičku tačnost i veliku robusnost na poremećaje koji ispunjavaju uslov (2) utoliko više, ukoliko je T manje.

Ekvivalentno upravljanje nominalnog digitalnog sistema sa kliznim režimom nalazi se iz uslova da se iz bilo kog polaznog stanja $\mathbf{x}_k(0)$ za jedan korak integracije dospe na $\mathbf{s}_{k+1}=0$, odnosno iz uslova [3] – [5]:

$$\mathbf{s}_{k+1} = \mathbf{C}_d \mathbf{x}_{k+1} = 0. \quad (9)$$

Ako je \mathbf{C}_d poznato, zamenom (3) u (9) i rešavanjem date jednakosti po \mathbf{u}_k dobija se

$$\mathbf{u}_k = -(\mathbf{C}_d \mathbf{B}_d)^{-1} (\mathbf{C}_d \mathbf{A}_d \mathbf{x}_k - \mathbf{C}_d \mathbf{v}_k). \quad (10)$$

Pošto je \mathbf{v}_k , u opštem slučaju, nemerljivo, definiše se ekvivalentno upravljanje za nominalni sistem:

$$\mathbf{u}_{k,eq} = -(\mathbf{C}_d \mathbf{B}_d)^{-1} \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d \mathbf{x}_k. \quad (11)$$

Radi kompenzacije poremećaja, ekvivalentnom upravljanju se dodaje prekidna komponenta, pa je ukupno upravljanje:

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_{k,eq} - \alpha \text{sign}(\mathbf{s}_k), \quad (12)$$

gde je α dijagonalna matrica sa pogodno izabranim α_i .

Ako se prethodno uvede kompenzacija poremećaja, na osnovu estimatora (5), upravljanje sistema postaje:

$$\mathbf{u}_k = -(\mathbf{C}_d \mathbf{B}_d)^{-1} (\mathbf{C}_d \mathbf{A}_d \mathbf{x}_k - \mathbf{C}_d \mathbf{v}_{k-1}), \quad (13)$$

ili

$$\mathbf{u}_k = -(\mathbf{C}_d \mathbf{B}_d)^{-1} (\mathbf{C}_d ((\mathbf{A}_d - \mathbf{I})\mathbf{x}_k + \mathbf{A}_d \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}_d \mathbf{u}_{k-1})) \quad (14)$$

Izraz (14) ćemo uprostiti primenom modela (6) i originalnog načina izbora \mathbf{C}_d [12].

C. Jedan način projektovanja kliznih režima

U ovom odeljku daćemo kratak prikaz jednog načina projektovanja kliznih režima predloženog u [12], a koji uključuje određivanje prekidačke funkcije na osnovu ekvivalentnog upravljanja nominalnog sistema (1). Metoda je primenjiva kako za kontinualne tako i u za diskretne klizne režime. U osnovi metode leži činjenica da izbor matrice \mathbf{C}_d nije jedinstven i da se \mathbf{C}_d može unapred zadavati. Metoda polazi od uslova da matrica $\mathbf{C}_d \mathbf{B}_d$ mora biti nesingularna ali može imati različite vrednosti

po izboru projektanta pa i vrednost jedinične matrice, što je osnovna pretpostavka ovog prilaza. Zatim, na osnovu spektra željenih sopstvenih vrednosti sistema u kontinualnom domenu, koji pružaju jasnu sliku projektantu o dinamici sistema, lako se nalaze adekvatne željene sopstvene vrednosti u diskretnom sif (z) domenu ili u diskretnom δ – domenu [13]. Osim toga, postupak se oslanja na metodu projektovanja povratne sprege po stanju sistema na osnovu alokacije polova (*pole placement*).

Poznato je da spektar željenih sopstvenih vrednosti sistema u kliznom režimu prvog reda (konvencionalni klizni režimi) sadrži m nultih sopstvenih vrednosti (koliki je broj upravljačkih ulaza) i $n-m$ sopstvenih vrednosti raspoređenih po želji u stabilnoj oplasti. Te sopstvene vrednosti određuju povratnu spregu po stanju, definisanu matricom pojačanja \mathbf{K} tako da matrica $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})^1$ ima željene sopstvene vrednosti,

Polazi se od sistema jednačina²:

$$\mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{BK}) = \mathbf{0}, \quad (15a)$$

$$\mathbf{CB} = \mathbf{I}_m. \quad (15b)$$

Pošto matrica $\mathbf{CB} = \mathbf{I}_m$ ima pun rang, relacija (15a) se može zapisati u obliku,

$$\mathbf{CA} = \mathbf{K}, \quad (16)$$

što je ekvivalentno $(\mathbf{CB})^{-1} \mathbf{CA}$ ako je $\mathbf{CB} \neq \mathbf{I}_m$. Sada se (15a) može napisati kao:

$$\mathbf{C}[\mathbf{A} \ \mathbf{B}] = [\mathbf{K} \ \mathbf{I}_m]. \quad (17)$$

odakle sledi

$$\mathbf{C} = [\mathbf{K} \ \mathbf{I}_m][\mathbf{A} \ \mathbf{B}]^\dagger, \quad (18)$$

gde je $[\mathbf{A} \ \mathbf{B}]^\dagger$ pseudoinverzna matrica.

Na kraju ovog odeljka izvešćemo i dokaz da se poremećaj koji deluje u kanalu upravljanja direktno odslikava u prekidačkoj funkciji (8) koja se na osnovu (6), (11), $\mathbf{C}_d \mathbf{B}_d = \mathbf{I}_m$ i $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_{k,eq} = -\mathbf{C}_d \mathbf{A}_d \mathbf{x}_k$ može napisati u obliku

$$\mathbf{C}_d \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d \mathbf{x}_k + (\mathbf{u}_k + \mathbf{d}_k)$$

odakle sledi $\mathbf{d}_k = \mathbf{s}_{k+1}$, odnosno $\mathbf{d}_{k-1} = \mathbf{s}_k$.

U [14] je pokazano kako se kompenzacija preko ovog signala postiže integraljenjem klizne funkcije, što je u [15] i [16] primenjeno na pozicioni i brzinski servosistem, respektivno, sa eksperimentalnom verifikacijom.

III. REGULATOR SA INTEGRISANIM ESTIMATOROM POREMEĆAJA

Polazeći od relacije (6) zapisane u obliku

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}_d (\mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{d}_{k-1}), \quad (19)$$

množeći levu i desnu stranu sa \mathbf{C}_d i uzimajući u obzir $\mathbf{C}_d \mathbf{B}_d = \mathbf{I}_m$, dobija se:

¹ Kompenzovani nominalni sistem se opisuje modelom $\mathbf{x}_{k+1} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \mathbf{x}_k$.

² Ovde su oznake matrica bez indeksa d , jer je postupak univerzalan kako za kontinualne tako i za diskretne klizne režime.

$$\mathbf{d}_{k-1} = \mathbf{C}_d \mathbf{x}_k - \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d \mathbf{x}_{k-1} - \mathbf{u}_{k-1} = \mathbf{s}_k - \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d \mathbf{x}_{k-1} - \mathbf{u}_{k-1} \quad (20)$$

Upravljanje, na osnovu (6), za $\mathbf{s}_{k+1} = \mathbf{C}_d \mathbf{x}_{k+1} = 0$, je

$$\mathbf{u}_k = -\mathbf{C}_d \mathbf{A}_d \mathbf{x}_k - \mathbf{d}_k. \quad (21)$$

Zamenom \mathbf{d}_{k-1} iz (20) umesto \mathbf{d}_k u (21), dobija se

$$\mathbf{u}_k = -\mathbf{C}_d \mathbf{A}_d (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}) - \mathbf{s}_k + \mathbf{u}_{k-1}. \quad (22)$$

Relacija (22) predstavlja kompletno (integrisano) klizno upravljanje sa estimatorom poremećaja (5), odnosno (20), u kome prvi član na desnoj strani predstavlja razliku ekvivalentnog upravljanja u k -tom i $k-1$ trenutku odabiranja.

U nastavku pokazaćemo da se taj član sastoji iz dva dela od kojih jedan nije dominantan i može se zanemariti u praksi.

A. Redukovani regulator

Sada ćemo izraz (22) pojednostaviti za dovoljno malo T . Razmotrimo član $\mathbf{C}_d \mathbf{A}_d (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1})$ imajući u vidu definiciju matrice \mathbf{A}_d :

$$\mathbf{A}_d = e^{\mathbf{A}T} = \mathbf{I}_n + \mathbf{A}T + \frac{\mathbf{A}^2 T^2}{2} + \dots \quad (23)$$

Tada se (22) svodi na

$$\mathbf{u}_k = -\mathbf{C}_d (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}) - \mathbf{C}_d \mathbf{A}T (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}) - \dots - \mathbf{s}_k + \mathbf{u}_{k-1}. \quad (24)$$

Veličina \mathbf{x}_k , u kliznom režimu je reda $O(T)$ dok su $(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1})$ reda $O(T^2)$ [17] pa je drugi sabirak na desnoj Strani: $\mathbf{C}_d \mathbf{A}T (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1})$ reda $O(T^3)$ i može se zanemariti u odnosu na ostale članove.

Konačno se dobija:

$$\mathbf{u}_k = -2\mathbf{s}_k + \mathbf{s}_{k-1} + \mathbf{u}_{k-1}. \quad (25)$$

Greška koja nastaje usled uvedene estimacije je reda $O(T^2)$ u odnosu na kliznu funkciju i $O(T)$ [17] u odnosu na \mathbf{x}_k , jer je $\mathbf{d}_k - \mathbf{d}_{k-1}$ reda $O(T^2)$. Lako se može pokazati da će primenom (25) navedene greške ostati istog reda veličine uz povećanje od $\mathbf{C}_d \mathbf{A}T (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1})$, koje se može zanemariti u realnim uslovima jer je za red veličine manje vrednosti.

Na taj način smo pokazali da se merenjem samo klizne funkcije u k -tom trenutku i njene vrednosti i upravljanja iz prethodnog trenutka odabiranja može realizovati visokokvalitetno upravljanje sistemom uz pretpostavku da je perioda diskretizacije dovoljno mala, a sistem bez nemodelovane dinamike. Drugim rečima u upravljanju eksplicitno odsustvuje ekvivalentno upravljanje.

Isti rezultat se postiže ako se koristi estimator poremećaja na osnovu integrala klizne funkcije. Tada je upravljanje

$$\mathbf{u}_k = -\mathbf{C}_d \mathbf{A}_d \mathbf{x}_k - \mathbf{u}_{int,k}, \quad (26a)$$

$$\mathbf{u}_{int,k} = \mathbf{u}_{int,k-1} + \mathbf{K}_{int} \mathbf{s}_k, \quad (26b)$$

gde je \mathbf{K}_{int} dijagonalna matrica koeficijenta pojačanja integralnog kompenzatora čije se vrednosti mogu birati u opsegu $0 \leq k_{int,i} \leq 1$, $i = 1, \dots, m$. Za $\mathbf{K}_{int} = \mathbf{I}$, sistem za jedan interval odabiranja kompenzuje konstantne poremećaje, a za $k_{int,i} < 1$ kompenzacija se odvija asimptotski utoliko brže ukoliko $k_{int,i} \rightarrow 1$. Poremećaji koji nisu konstantni slabe se utoliko više ukoliko im je brzina promene manja u odnosu na frekvenciju odabiranja sistema.

Na isti način se može pokazati, primenom (23) da se (26) može svesti na:

$$\mathbf{u}_k = -\mathbf{s}_k - \mathbf{u}_{i,k}, \quad (27a)$$

$$\mathbf{u}_{i,k} = \mathbf{u}_{i,k-1} + \mathbf{K}_i \mathbf{s}_k. \quad (27b)$$

Načinom projektovanja sistema, tj. izborom upravljanja koje doseže kliznu funkciju za jedan korak integracije, izabranu tako da je stabilna, kao i dodatnom kompenzacijom poremećaja obezbedjena je stabilnost sistema. Napomenimo da kod prve metode kompenzacije ne može se podešavati pojačanje, što predstavlja problem kod objekata sa nemodelovanom dinamikom [20].

U praksi diskretno klizno upravljanje može imati vrlo velike vrednosti, što zahteva uvođenje ograničenja u regulatoru ili su ograničenja prisutna u samom objektu. U tom slučaju nastaju problemi stabilnosti i problemi integracionog zamaha (windup), jer upravljanja (25) i (27) sadrže integratore, što izlazi iz okvira ovog rada, a slične analize se mogu naći u [18].

Ovde ćemo ukazati na originalan način eliminacije problema integracionog zamaha, koji je proizašao iz realizacije sistema sa prvom metodom kompenzacije poremećaja. Sam integrator u sebi treba da sadrži limitator koji se nalazi u direktnoj grani, a obuhvaćen je pozitivnom povratnom spregom preko elementa čistog kanjenja (videti sl. 1).

IV. ILUSTRATIVNI PRIMER

U ovom odeljku dajemo primer sistema čiji je model (1) drugog reda sa skalarnim upravljanjem, kao tipičan pozicioni servosistem:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} (u(t) + f(t)) \quad (28)$$

x_1, x_2 su pozicija i brzina kao koordinate stanja koje su direktno merljive. Sistemi takvog tipa su posmatrani u mnogim radovima. U radu [15] je razmatran sistem sa kompenzacijom poremećaja preko integrala klizne funkcije (26), dok je u [19] primenjena kompenzacija poremećaja kompenzatorom prvog tipa (5). Ovde ćemo koristiti podatke iz [19] i izvršiti uporedjenje sistema iz [19] sa našim prilazima sa potpunim

³ Lako se pokazuje da su upravljanja (25) i (27) identična. Napišimo (28b) u z -domenu za $K_i = I_m$: $u_i(z) = s(z)z/(z-1)$ i zamenimo u (27a) zapisanom u z -

domenu. Posle množenja leve i desne strane sa $z-1$ i prelaskom u vremenski domen dobija se (25).

(22) i redukovanim regulatorom (25) kao i sa kompenzacijom putem integrala klizne funkcije (26) i (27).

Parametri objekta upravljanja su: $a = -144$, $b = 6$. Početni uslov je $x(0) = [-1 \ 0]^T$ perioda diskretizacije $T = 1$ ms, a $c = [0.5 \ 0.5]$, a dato je bez obrazloženja načina izbora.

U ovom radu koristićemo kao spoljni poremećaj:

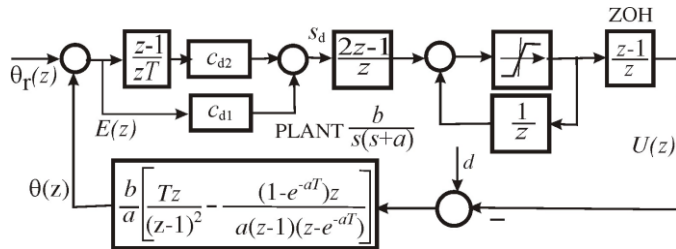
$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{za } 0 \leq t \leq 30; \\ 1 + 2.2 \sin(0.5\pi t) & \text{za } 30 \leq t \leq 60; \\ 1 + 8.8 \sin(0.5\pi t) & \text{za } 60 \leq t \leq 90. \end{cases}$$

Zadržaćemo početni uslov, periodu diskretizacije i dinamiku sistema datu u [19], a uvešćemo ograničenje upravljanja na $|u_k| \leq 50$.

Na osnovu datih podataka, želeći da upoređujemo sisteme sa istim zadatim dinamičkim osobinama, najpre ćemo odrediti spektar polova sistema [19], uz napomenu da je $cb_a \neq 1$ u [19],

$$p_a = \text{eig}(A_d - b_d(cb_a)^{-1}cA_d) = [0 \ 0.999],$$

i projektovati sistem sa $c_d b_d = 1$.



Slika 1. Blok šema servosistema prema algoritmu (25) sa ograničenjem veličine upravljanja i sprečavanje integracionog zamaha (antiwindup).

Program za određivanje vektora k_d i c_d prema našem postupku projektovanja je:

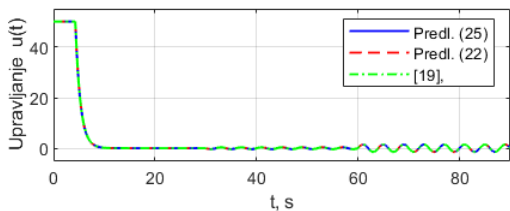
```
A=[0 1;0 -144];b=[0;6];T=0.001;
%Shift domain design
[Ad,bd]=c2d(A,b,T);pd=[0 0.999];
kd=acker(Ad,bd,pd);
cd=[kd 1]*pinv([Ad bd]);
```

Dobijene su sledeće vrednosti:

$$k_d = c_d A_d = [178.954567 \quad 155.041898];$$

$$c_d = [c_{d1} \ c_{d2}] [178.954567 \quad 178.862943];$$

Na sl. 1 je data strukturna blok šema sistema. Rezultati simulacije prikazani su na sl. 2 - sl. 4 .

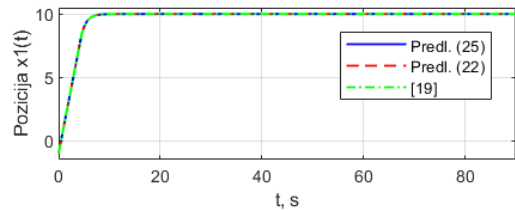


Slika 2. Upravljanja sistema [19] i predloženog rešenja.

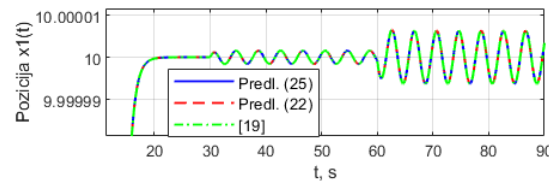
Na sl. 2 data su upravljanja navedenih sistema. Vidi se da, osim razlike u trenutku starta, upravljanja se u celom opsegu podudaraju, a samim tim i odziv sistema, što se vidi na sl. 3a, sa prikazanim detaljem u stacionarnom stanju (sl. 3b) iz koje se uočava visoka tačnost pozicioniranja čak i pri delovanju promenljivih poremećaja. Radi uporedjenja, na sl. 3c je prikazan isti sistem bez kompenzatora poremećaja.

Sa slike 3c se vidi da bez kompenzacije sistem ima statičku grešku i usled delovanja poremećaja konstantne vrednosti.

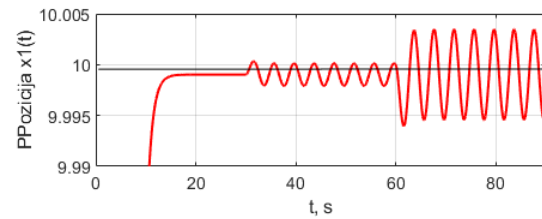
Isti rezultati se dobijaju i sa kompenzacijom poremećaja na osnovu integrala prekidačke funkcije.



a)

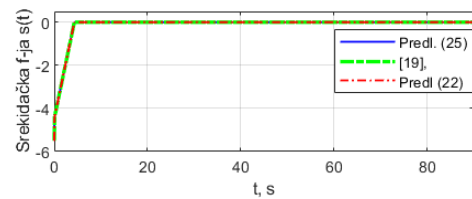


b)

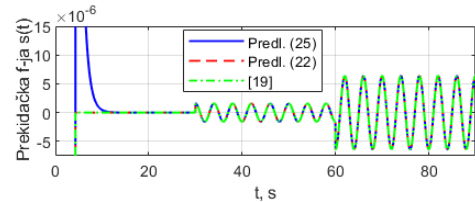


c)

Slika 3. Uporedni rezultati rada [19] i predloženog rešenja. a) Odziv na referencu $10h(t)$; b) detalj ponašanja sistema u stacionarnom stanju sa kompenzacijom poremećaja sa upravljanjem (25), odnosno (27). c) detalj ponašanja sistema u stacionarnom stanju bez kompenzacije. poremećaja.



a)



b)

Slika 4. Uporedni prikaz kliznih funkcija sistema [19] i predloženog. Istaknimo da su koeficijenti klizne funkcije C_d različiti. Kod predloženog sistema su oko 358 puta veći, pa je izvršeno skaliranje tim faktorom da se pokaže da imaju isti tok.

Upoređivanje ponašanja prekidačke funkcije sistema [19] i predloženog sistema nema naročitog smisla jer su vektori C_d koji definišu prekidačke funkcije veoma različiti. Ako se, ipak, izvrši skaliranje jednog od njih radi svodjenja na isti nivo, dobijaju se dijagrami kao na sl. 4. Sl. 4a pokazuje da su prekidačke funkcije identične, mada sl. 4b, koja predstavlja detalj sl. 4a, ukazuje na izvesne razlike u procesu dosezanja, što je posledica dva faktora: (i) nepodudarnosti odnosa koeficijenta vektora C_d koji je 1 kod sistema [19] a 1.0005 u predloženom sistemu; (ii) zanemarivanje $C_d AT(x_k - x_{k-1})$ u algoritmu upravljanja.

ZAKLJUČCI

U radu je analiziran sistem upravljanja linearnim invarijantnim kontinualnim objektom primenom diskretnog kliznog režima sa estimatorom/kompenzatorom poremećaja. Razmatrana su dva tipa estimatora. Oba generišu poremećaj sa kašnjenjem od jedne periode diskretizacije. Jedan se zasniva na nominalnom diskretnom modelu objekta upravljanja, a drugi na činjenici da se poremećaj, koji dolazi preko kanala upravljanja objektom, direktno „vidi“ u kliznoj funkciji iz koje se poznatim postupkom estimacije izdvaja. U radu je pokazano da se ovi estimatori jednostavno integrišu u algoritam upravljanja, a kao poseban doprinos rada je pojednostavljenje algoritma upravljanja za sisteme sa malom periodom diskretizacije, koji pokazuje da upravljanje eksplicitno ne zavisi od ekvivalentnog upravljanja, koje se široko koristi u teoriji i praksi diskretnih kliznih režima, već samo od tekuće i prethodne vrednosti klizne funkcije i od prethodne vrednosti upravljanja. Na primeru pozicionog servosistema simulacijom je pokazano da je predloženo pojednostavljenje u potpunosti opravdano za diskretne klizne režime sa malom periodom odabiranja. Dalji pravac istraživanja je uticaj navedenog zanemarivanja na probleme stabilnosti sistema i osobine sistema sa navedenim estimatorima u slučaju prisustva nemodelovane dinamike.

REFERENCE

- [1] B. Drazenovic, (1969). The invariance conditions in variable structure systems. *Automatica*, 5(3), 287–295.
- [2] Č. Milosavljević (1985), General conditions for existence of a quasi-sliding mode on the switching hyperplane in discrete variable structure systems, *Automatic Remote Control*, 46 307–314
- [3] Z. Bučevac (1999), Discrete-time Variable Structure Control Systems - Multivariable Linear Plant Case, *Facta Universitatis Series: Mechanics, Automatic Control and Robotics* Vol.2, No 9, pp. 983 – 994.
- [4] V.I. Utkin, S. Drakunov (1989), On discrete-time sliding mode control, IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems, Capry, Italia, 484–489.
- [5] W.-C. Su, S.V. Drakunov and U. Ozguner (1993), Sliding Mode Control in Discrete Time Linear Systems, IFAC 12th Triennial World Congress. Sydney. Australia.
- [6] A. Bartoszewicz (1998), Discrete-time quasi-sliding-mode control strategies, *IEEE Trans on Ind. Electron.* 45 (4) 633–637.
- [7] W. Gao, Y. Wang, A Homaifa (1995), Discrete-time variable structure control systems. *IEEE Trans Ind Electron.* 42(2):117-122.

- [8] A. Bartoszewicz, P. Lesniewski (2016); New switching and non-switching type reaching laws for SMC of discrete time systems. *IEEE Trans Control Syst Technol.* 24(2):670-677.
- [9] G. Golo, A. Van der Schaft, Č. Milosavljević, Discretization of control law for a class of variable structure control systems, in: *Advances in Variable Structure Systems: Analysis, Integration and Applications*, World Scientific, 2000, pp. 45–54.
- [10] V. Acary, B. Brogliato, “Implicit Euler numerical scheme and chattering-free implementation of sliding mode systems,” *Systems & Control Letters*, Vol. 59, no. 5, pp. 284 – 293, 2010.
- [11] B. Veselić, B. Draženović, Č. Milosavljević, Č. (2014.), “Sliding manifold design for linear systems with unmatched disturbances”, *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 351, No. 4, pp. 1920-1938.,
- [12] B. Draženović, Č. Milosavljević, B. Veselić (2013), Comprehensive approach to sliding mode design and analysis in linear systems, *Advances in sliding mode control: concept, theory and implementation* 1–19.
- [13] G. Golo, Č. Milosavljević (2000), Robust discrete-time chattering free sliding mode control, *Systems & Control Letters* 41, 119–28.
- [14] M. Lješnjanin, B. Drazenović, Č. Milosavljević, B. Veselić (2011), Disturbance compensation in digital sliding mode, in: 2011 IEEE EUROCON-Intern. Conf. on Computer as a Tool, IEEE, , pp.1–4.
- [15] Č. Milosavljević, B., Peruničić-Draženović, B. Veselić, D. Mitić (2005), A new design of servomechanisms with digital sliding mode, *Electrical Engineering* 1-12.
- [16] Č. Milosavljević, B. Peruničić-Draženović, B. Veselić (2012), Discrete-time velocity servo system design using sliding mode control approach with disturbance compensation, *IEEE Transactions on Industrial Informatics* 9 (2920–927).
- [17] K. Abidi, J.-X. Xu, X. Yu (2007), On the discrete-time integral sliding-mode control, *IEEE Trans on Automatic Control* 52 (4) 709–715.
- [18] B. Veselić, Č. Milosavljević, B. Peruničić-Draženović, S. Huseinbegović, M. Petronijević (2020), Discrete-time sliding mode control of linear systems with input saturation, *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science* 30 (3) 517–528
- [19] H. Du, X. Yu, MZQ Chen, S. Li (2016), Chattering-free discrete-time sliding mode control. *Automatica.*; 68:87-91.
- [20] G. Milosavljević i M. Petronijević (2024), Kompenzacija poremećaja u sistemima sa diskretnim kliznim režimima – upoređenje dveju metoda, 23- Internacionalni Simpozijum, INFOTEH - JAHORINA , 22-24 mart.

ABSTRACT

A new design approach of discrete time sliding mode-based controllers with disturbance compensation is proposed in this article. The approach is applicable for linear time invariant plants with matched disturbances. Starting from the known method for disturbance estimation using discrete time nominal plant model and using original sliding mode control design method, full integration of the two algorithms in one united is proposed. Barring that, the proposed algorithm, for small sampling time, can be additionally simplified. The simplified algorithm does not directly depend on the equivalent control but only on the switching function present value and its previous value and previous value of the control. The method is illustrated in the design of positional servo system. Comparative results are shown by computer simulation of different methods.

A NEW DESIGN APPROACH OF DISCRETE TIME SLIDING MODE BASED CONTROLLERS WITH DISTURBANCE COMPENSATION

Čedomir Milosavljević and Boban Veselić