Концептуална анализа Поасоновог процеса у теорији телесаобраћаја кроз обједињени приступ λ–рачуна и теорије вјероватноће

Милан Васиљевић, Милорад К. Бањанин
Универзитет у Источном Сарајеву
Филозофски факултет – Катедра за рачунарске науке и системе, Пале
milanvasiljevic84@gmail.com
milorad.banjanin@ff.ues.rs.ba

Александар Стјепановић, Мирко Стојчић, Драгана Недић
Универзитет у Источном Сарајеву
Саобраћајни факултет, Добој
aleksandar.stjepanovic@sf.ues.rs.ba,
mirko.stojcic@sf.ues.rs.ba, dragana.nedic@sf.ues.rs.ba

***Сажетак*— У раду је приказан начин интеграције основних концепата λ-рачуна и Поасоновог процеса у анализи телекомуникационих система. Циљ истраживања дефинише формалан оквир за моделовање и разумијевање броја долазних позива, вјероватноће блокирања и степена телесаобраћајне услуге. λ-рачун, као формални језик за израчунавање функција, користи λ-терме за представљање израза и манипулацију функцијама. Формални језик се оријентише на вјероватносни λ-рачун увођењем оператора за функцију расподјеле вјероватноће за стандардне λ-терме. У фокусу је Поасонов процес у телекомуникационим мрежама гдје се анализира стање система детерминисано бројем остварених позива. Моделовање догађаја, попут долазних позива, прекида и задржавања у систему, реализује се кроз λ-терме и конструкцију вјероватносног стабла редукција. Конструкција вјероватносно стабла илуструје промјене стања система током малог временског периода дајући формалан увид у токове комплексних догађаја у телесаобраћају.**

Кључне ријечи - концептуална анализа; λ–рачун; вјероватносни λ–рачун; Поасонов процес у теорији телесаобраћаја

I. Увод

Концепт се односи на све могуће ситуације повезане са неком појавом или феноменом, а описане су језичким термином којим се омогућава постављање питања о њиховим карактеристикама. Будући да се дефиницијом јасно детерминише садржај концепта она мора да садржи опис потребних и довољних карактеристика неке појаве коју представља тај концепт. У сврху разумијевања и објашњавања концепта изводи се процес концептуалне анализе искључујући актуелно искуство о стварима које означава тај концепт. Дакле, концептуалном анализом се описују и објашњавају начини перцепције одређене ствари, док се сама ствар не описује и не објашњава, гдје се под перцепцијом сматра индивидуално схватање и интерпретирање стварности [1].

Улоге анализе концепата и пропозиција су кључне у изградњи теорије. Према [2] пропозиције се дефинишу као „изјаве којима се описују логичке везе између концепата постављајући између њих универзалну конекцију“, док се „теорија интерпретира као кохерентни сет општих пропозиција“, које се користе као принципи објашњавања очигледних односа посматраног феномена.

λ–рачун представља формални језик и математички модел који се користи за израчунавање и репрезентацију функција. Такође, веома је користан за доказивање израчунљивости неког алгоритма. Основне градивне елементе λ–рачуна су функције. Поред улоге функције, односно алгоритма, могу вршити улогу аргумента функције, односно улаза за алгоритам. Представљају се изразима који се називају λ–терми. Како у λ–рачуну основне градивне елементе представљају функције, стога су и природни бројеви интерпретирани у форми примјене одређених функција и називају се Черчови[1] нумерали. Такође, одређивање сљедбеника и претходника дефинисано је примјеном функција на Черчове нумерале.

Због анализе вјероватносних процеса могуће је формализам за записивање λ–терма проширити одређеним вјероватносним модалитетом који резултује настанком вјероватносног λ–рачуна, односно уводе се функције расподјеле вјероватноћа за неки скуп λ–терма.

У домену теорије телесаобраћаја посебан фокус има Поасонов[2] процес који се користи за моделовање и анализу броја остварених позива, односно броја заузетости комуникационих канала у систему. Имплементацијом вјероватносног λ–рачуна у теорији телесаобраћаја могуће је интерпретацију Поасоновог процеса Марковљевим ланцем замијенити са формалном математичком структуром вјероватносног стабла редукција. Та структура описује стања система и вјероватноће прелаза између тих стања.

II. Основни концепти λ–рачуна

λ–терми представљају синтаксне цјелине над алфабетом који обухвата[3]:

[1] Alonzo Church (1903 – 1955) – амерички математичар

[2] Simeon Poisson (1781 – 1840) – француски математичар

- ✓ Скуп промјенљивих $Var\ (x, y, u, v, w, \dots)$
- ✓ Апстрактор: λ
- ✓ Заграде и тачка (,), .

Скуп свих λ–терма Λ дефинише се индуктивно:

- ✓ $x \in Var \ \Rightarrow x \in \Lambda$ – промјенљива
- ✓ $x \in Var \ \wedge \ M \in \Lambda \Rightarrow (\lambda x. M) \in \Lambda$ – апрстакција
- ✓ $M, N \ \in \ \Lambda \ \Rightarrow (MN) \in \Lambda$ – апликација

Апстракција $\lambda x. M$ се интерпретира као безимена функција са аргументом x који се пресликава у вриједност одређену изразом M. Нпр. апстракција $\lambda x. x$ у стандардној математичкој нотацији се записује као $f(x) = x$. Иначе, $\lambda x. x$ назива се функцијом идентитета и обиљежава се $id \equiv \lambda x. x$.

Апликација MN представља основну операцију λ –рачуна и интрепретира се као примјена терма M на терм N, односно, N је улаз за алгоритам M. Важно својство апликације је лијева асоцијативност која се односи на приоритет примјене првог терма с лијеве стране. Апликација MNP реализује се као $(MN)P$.

Редукционим процесом сматра се трансформација израза која се реализује у складу са одређеним правилима стварајући повољнији израз за обраду и примјену [4]. У λ–рачуну трансформације које су окарактерисане као замјена дијела λ–терма са другим λ–термом називају се редукције. Најчешће примјењивана редукција у λ–рачуну назива се β–редукција која представља сљедеће правило трансформације λ–терма:

$$(\lambda x. M)N \rightarrow_\beta M[x \coloneqq N] \tag{1}$$

чија семантика указује на замјену промјенљиве x у терму M са термом N. Може се примијетити да β– редукција описује начин на који се реализује апликација. λ–терм над којим је могуће извршити β– редукцију назива се редекс, а за λ–терм који не садржи ниједан редекс каже се да је у нормалној форми [5].

Функције више промјенљивих у λ–рачуну заснивају се на принципу $f\big(x_1(x_2 \dots (x_n) \dots)\big) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, односно, свака промјенљива је функција која зависи од наредне промјенљиве. Формални запис функција више промјенљивих је сљедећи:

$$\lambda x_1. \lambda x_2 \dots \lambda x_n. M \equiv \lambda x_1 x_2 \dots x_n. M \tag{2}$$

A. Кодирање скупа $\mathbb{N}_0$ у λ–рачуну

Кодирање елемената скупа природних бројева са нулом заснива се на броју итеративних примјена једног терма на промјенљиву. Природни бројеви са нулом у λ–рачуну називају се Черчови нумерали и представљени су на сљедећи начин [6]:

$$\mathbf{0} \equiv \ \lambda f x. x$$

$$\mathbf{1} \equiv \ \lambda f x. f x$$

$$\mathbf{2} \equiv \ \lambda f x. f\big(f(x)\big)$$

Уопштено,

$$\boldsymbol{n} \equiv \ \lambda f x. f\big(f(f \dots (f x) \dots)\big)$$

Односно, у скраћеној форми [6]:

$$\boldsymbol{n} \equiv \ \lambda f x. f^n x \tag{3}$$

Једно од основних својстава скупа $\mathbb{N}_0$ јесте иманентност сљедбеника за сваки елеменат тог скупа. У λ–рачуну сљедбеник се одређује примјеном λ–терма:

$$succ \equiv \lambda m f x. f(m f x) \tag{4}$$

на неки од Черчових нумерала [7].

Заиста,

$$succ(\boldsymbol{n}) \equiv \big(\lambda m f x. f(m f x)\big)\boldsymbol{n}$$
$$\equiv \big(\lambda m f x. f(m f x)\big)\big(\lambda a b. a^n(b)\big)$$
$$\rightarrow_\beta \lambda f x. f\left(\big(\lambda a b. a^n(b)\big) f x\right)$$
$$\rightarrow_\beta \lambda f x. f\left(\big(\lambda b. f^n(b)\big) x\right) \rightarrow_\beta \lambda f x. f\big(f^n(x)\big)$$
$$\equiv \lambda f x. f^{n+1}(x) \equiv n + 1$$

Примјена λ–терма (5)

$$pred \ \equiv \lambda n f x. n\big(\lambda g h. h(g f)\big)(\lambda u. x)(\lambda u. u) \tag{5}$$

на Черчов нумерал (3) резултује одређивањем његовог претходника [7].

Такође, основне аритметичке операције над Черчовим нуремралима дефинисане су сљедећим λ-термима:

- ✓ Сабирање - $add \ \equiv \lambda m n f x. m f(n f x)$ (6)
- ✓ Одузимање - $sub \ \equiv \lambda m n. (n\, pred)\ m$ (7)

које над примјеном на два Черчова нумерала резултују збиром, односно разликом тих нумерала.

B. Контрола тока у λ–рачуну

Пројекцијама прве или друге промјенљиве у λ–рачуну интерпретирају се истинитосне вриједности $true$ (T) и $falshe$ (F). Заправо [8]:

- ✓ *true* - $T \equiv \lambda x y. x$ (8)
- ✓ *falshe* - $F \equiv \lambda x y. y$ (9)

Уочљиво је да λ–терм Т враћа вриједност првог, а F другог аргумента, те се може закључити да оператор контроле тока $if - then - esle$ може дефинисати λ –термом[8]:

$$IF \ \equiv \ \lambda p x y. p x y \tag{10}$$

који се примјењује, прима три аргумента и у зависноти од истинитосне вриједности првог аргумента враћа други аргумент (x), односно трећи (y). У елегантнијем запису оператор контроле тока дат је у форми PMN која се редукује у λ–терм M ако је $P \equiv T$, односно N ако је $P \equiv F$. Заиста, за $P \equiv T$ важи:

$$PMN \equiv TMN \equiv (\lambda xy.x)MN \rightarrow_\beta (\lambda y.M)N \rightarrow_\beta M$$

Односно, за $P \equiv F$ важи:

$$PMN \equiv FMN \equiv (\lambda xy.y)MN \rightarrow_\beta (\lambda y.y)N \rightarrow_\beta N$$

Логички оператори за конјукцију, дисјункцију и негацију у λ–рачуну дефинишу се сљедећим λ-термима, респективно[8]:

$$AND \equiv \lambda xy.xyF \tag{11}$$

$$OR \equiv \lambda xy.xTy \tag{12}$$

$$NOT \equiv \lambda x.xFT \tag{13}$$

За одређивање истинитости услова да ли Черчов нумерал има вриједност 0, да ли је први Черчов нумерал мањи или једнак са другим и да ли су два Черчова нумерала међусобно једнака, респективно се користе сљедећи λ–терми[8]:

- ✓ *„једнако нули“ :* $isZero \equiv \lambda n.n(\lambda x.F)T$ (14)
- ✓ *„мање или једнако“:*

$$leq \equiv \lambda mn.isZero(sub\ m\ n) \tag{15}$$

- ✓ *„једнако“:*

$$eq \equiv \lambda mn.AND(leq\ m\ n)(leq\ n\ m) \tag{16}$$

III. Вјероватносни λ – рачун

Основни разлог настанка и развоја теорије вјероватноће је тај што се у масовним појавама запажа да се поједини догађаји реализују са релативно стабилном фреквенцијом, којом се указује да је објективно присутну случајност у масовним појавама могуће квантитативно мјерити [9].

Један од тих праваца развоја је вјероватносни λ– рачун који настаје проширењем скупа Λ, скупа свих λ–терма са модалитетом $\oplus_{i=1}^{n}$, који представља n –арни оператор над елементима скупа Λ, чија се семантичка интерпретација заснива на придруживању броја p_i $(i = \overline{1,n};\ p_i \in [0,1];\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1)$ терму који је на позицији i –тог операнда. Резултат описаног проширења је скуп свих λ–терма којима је придружена одговарајућа вјероватноћа реализације, односно скуп Λ_p чији су елементи тзв. вјероватносни λ–терми чија је синтакса [10]:

$$P \coloneqq x|\lambda.P|PP'|\oplus_{i=1}^{n} p_i : P_i \tag{17}$$

Заправо, модалитет $\oplus_{i=1}^{n}$ представља функцију расподјеле вјероватноће над λ–термима P_i.

Сваки класични λ–терм може се сматрати вјероватносним термом тако да функција расподјеле вјероватноћа класичном λ–терму додјељује вриједност 1, а свим осталим термима вриједност 0. За случај $n = 2$ користи се сљедећа нотација:

$$\oplus_{i=1}^{2} p_i : P_i \equiv P_1 \oplus_p P_2 \tag{18}$$

У значењу да се терму P_1 додјељује вјероватноћа $1 - p$, а терму P_2 вјероватноћа p.

Трансформације вјероватносних λ–терма заснивају се на вјероватносним редукцијама. Класична β–редукција у вјероватносном λ–рачуну има форму:

$$(\lambda x.M)N \rightarrow_\beta^1 M[x \coloneqq N] \tag{19}$$

са значењем да ће се β–редукција извршити као сигуран догађај, тј. са вјероватноћом 1.

δ–редукција у вјероватносном λ–рачуну користи се за трансформацију вјероватносног λ–терма $\oplus_{i=1}^{n} p_i : P_i$ у терм P_i са вјероватноћом p_i , у симболичком запису [10]:

$$\oplus_{i=1}^{n} p_i : P_i \rightarrow_\delta^{p_i} P_i \tag{20}$$

IV. Поасонов процес у телесаобраћају

За Поасонов процес у телесаобраћају може се рећи да представља метод статистичког мултиплексирања канала за пренос сигнала [11]. Емпиријски је утврђено да је веома мала вјероватноћа да ће број корисника који желе да упуте позив већи од броја канала и та вјероватноћа назива **вјероватноћа блокирања** или **степен услуге**.

Долазни позиви се могу окарактерисати као случајне промјенљиве са Поасоновом расподјелом вјероватноће[12]:

$$P(k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \tag{21}$$

која се интерпретира као вјероватноћа да ће се у временском интервалу дужине t остварити број од k позива, гдје је:

- ✓ k – број позива
- ✓ λ – фреквентност позива, односно просјечан број позива у јединици времена

У сврху детаљније интерпретације Поасоновог процеса може се разматрати целуларни систем, као један од најистакнутијих телекомуникационих система [13]. Приликом његовог моделовања може се претпоставити да је доступно N канала за остваривање позива, односно да максимално N корисника у било ком тренутку може упутити позив.

Управо, број заузетих канала, односно, број упућених позива у временском тренутку представља стање бежичног комуникационог система. Дакле, могућа стања система су $S_0, S_1, S_2, \ldots$ гдје је S_0 стање у коме нису упућени позиви (сви канали су слободни), S_1 стање у коме је остварен један позив, S_k $(k \leq N)$ стање у коме је остварено k позива. Систем може прелазити из стања у стање, у зависности да ли се у датом тренутку повећао или смањио број позива за 1. Ако систем дође у стање S_N, сви канали су заузети, те се сваки наредни позив блокира. Нека су $P_0, P_1, P_2, \ldots$ вјероватноће да се систем налази, респективно, у стањима $S_0, S_1, S_2, \ldots$, онда се са P_N обиљежава вјероватноћа блокирања. Разматрајући вјероватноћу једног долазног позива у веома малом временском интервалу $\Delta t \to 0$, уз Поасонову расподјелу, добија се:

$$P_1 = P(1) = \lambda \Delta t * e^{-\lambda \Delta t} \quad (22)$$

Односно,

$$P_1 = \lambda \Delta t \quad (23)$$

јер $e^{-\lambda\Delta t} \to 1$ за $\Delta t \to 0$.

Ако је T вријеме просјечног трајања позива, онда је $\mu = \frac{1}{T}$ просјечан број одлазећих, односно, прекинутих позива у јединици времена. Стога, вјероватноћа да се један позив прекине у малом временоском интервалу Δt, с обзиром на Поасонову функцију расподјеле, износи $\mu\Delta t$. Ако се систем налази у стању S_k тада постоји k могућности за прекид једног позива, те у том случају вјероватноћа прекида једног позива је $k\mu\Delta t$.

Вјероватноћа да систем остаје у истом стању у временском интервалу Δt , односно у стању са k остварених позива износи $1 - \lambda\Delta t - k\mu\Delta t$.

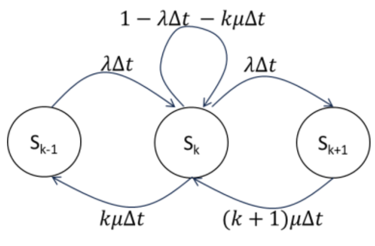
Укратко, вјероватноћа да ће систем у временском интервалу Δt из стања S_k прећи у стање:

- ✓ S_{k+1} је $\lambda\Delta t$
- ✓ S_{k-1} је $k\mu\Delta t$
- ✓ Задржати се у истом стању је $1 - \lambda\Delta t - k\mu\Delta t$

Графички приказ прелаза између сусједних стања описаног процеса, у општем случају, може се представити Марковљевим ланцем (Сл. 1.) који представља користан алат у креирању статистичких модела којим се описује процесно понашање система. Иманентност својства Маркова карактерише неусловљеност вјероватноће будућег стања система реализацијом стања система која су довела до тренутног стања. Формално се може рећи да важи:

$$P\{S_{k+1}|S_0 S_1 \ldots S_k\} = P\{S_{k+1}|S_k\}$$

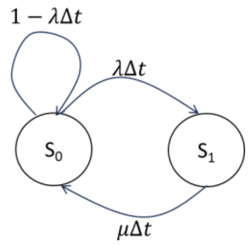
одакле се закључује да опис садашњости у потпуности садржи информацију која може утицати на будуће стање система [14].



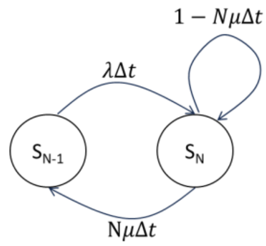
Слика 1. – Марковљев ланац Поасоновог процеса за прелазе у сусједна стања у општем случају

За граничне случајеве важи:

- ✓ Систем је у почетном стању са број позива 0, односно сви канали су слободни. Вјероватноћа за повећање броја позива за 1, као у општем случају, износи $\lambda\Delta t$. У почетном стању није могуће смањење броја позива, те је вјереоватноћа одласка позива 0, одакле слиједи да је вјероватноћа за система у том стању $1 - \lambda\Delta t$ (Сл.2.)
- ✓ Систем је у блокираном стању са оствареним максималним бројем позива N, тј. сви канали су заузети, те је немогућ пријем новог позива. Како је вјероватноћа одласка позива $N\mu\Delta t$, тада је вјероватноћа задржавања система у блокираном стању $1 - N\mu\Delta t$ (Сл.3.)



Слика 2. – Марковљев ланац Поасоновог процеса за прелаз из почетног у наредно стање



Слика 3. – Марковљев ланац Поасоновог процеса за прелаз из стања блокирања у наредно стање

V. Интерпретација Поасоновог процеса у λ–рачуну

Стање система S_k, тј. ако је остварено k позива, у контексту λ–рачуна може се кодирати Черчовим нумералом $\boldsymbol{k} \equiv \lambda f x. f^k(x)$. Прелазак из стања S_k у стање S_{k+1} условљено је доласком једног позива што се у λ–рачуну може интерпретирати примјеном λ–терма којим се кодира сљедбеник на Черчов нумерал k уз вјероватноћу $\lambda\Delta t$. Слично, прелазак из стања стања S_k у стање S_{k-1} условљено је прекидом једног позива, односно број остварених позива је умањен за 1, те се у контексту λ–рачуна овај случај може интерпретирати примјеном λ–терма за одређивање претходника на Черчов нумерал $\boldsymbol{k}$ уз вјероватноћу $k\mu\Delta t$. Задржавање стања може се описати примјеном λ–терма који представља функцију идентитета, тј. терм: $\lambda x.x$, на $\lambda f x. f^k(x)$ уз вјероватноћу $1 - \lambda\Delta t - k\mu\Delta t$. У општем случају, све наведено може се представити вјероватносним λ– термом:

$$P \equiv \oplus_{i=1}^{3} p_i : P_i \quad (24)$$

Гдје је:

- ✓ $p_1 = \lambda \Delta t \; u \; P_1 \equiv \big(\lambda m f x. f(m f x)\big)\boldsymbol{k}$ (25)
- ✓ $p_2 = k\mu\Delta t$ (26)

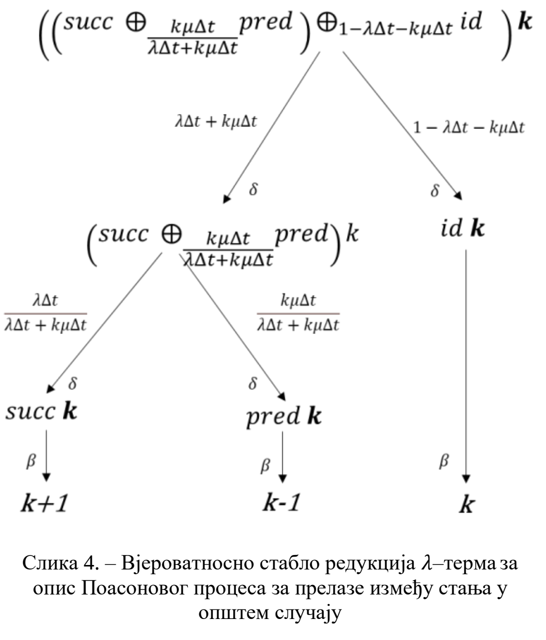
$$P_2 \equiv \Big(\lambda nfx.n\big(\lambda gh.h(gf)\big)(\lambda u.x)(\lambda u.u)\Big)\boldsymbol{k}$$

- ✓ $p_3 = 1 - \lambda\Delta t - k\mu\Delta t$ u $P_3 \equiv (\lambda x.x)\boldsymbol{k}$ (27)

У сврху конструкције вјероватносног стабла редукција, λ–терм $P \equiv \oplus_{i=1}^{3} p_i : P_i$ представљен је бинарним оператором $\oplus_p$ којим се првом операнду додјељује вјероватноћа $1-p$, а другом операнду вјероватноћа p. Како вјероватноћа да систем остаје у истом стању, не мијења се број остварених позива, износи $1-\lambda\Delta t - k\mu\Delta t$, то вјероватноћа за прелазак у једно од два стања износи $\lambda\Delta t + k\mu\Delta t$. Дакле, прво ће се догађаји разврстати на два скупа, у првом скупу су догађаји који описују да систем мијења стање повећањем или смањењем броја позива за један, а у другом скупу је догађај да систем задржава стање, те се користи оператор $\oplus_{1-\lambda\Delta t-k\mu\Delta t}$ за повезивање терма за одређивање сљедбеника и претходника са термом функције идентитета. Расподјела вјероватноће у оквиру првог скупа догађаја износи $\frac{k\mu\Delta t}{\lambda\Delta t+k\mu\Delta t}$ за промјену у стање са смањеним бројем позива за 1 и $\frac{\lambda\Delta t}{\lambda\Delta t+k\mu\Delta t}$ за промјену у стање са повећаним бројем позива за 1. Стога се користи оператор $\oplus_{\frac{k\mu\Delta t}{\lambda\Delta t+k\mu\Delta t}}$ за повезивање терма за одређивање сљедбеника и претходника Черчовог нумерала. На основу свега описаног формулише се сљедећи терм (29) који описује промјену стања система на основу Поасоновог процеса.

$$\left(\left(succ \oplus_{\frac{k\mu\Delta t}{\lambda\Delta t+k\mu\Delta t}} pred\right)\oplus_{1-\lambda\Delta t-k\mu\Delta t} id\right)\boldsymbol{k} \qquad (28)$$

Примјењујући на дати израз вјероватносне δ – редукције и класичну β–редукцију добија се вјероватносно стабло редукција (Сл. 4), тј. трансформација датог израза које описује стања телекомуникационог система која су одређена бројем успостављених позива, односно бројем заузетости канала.

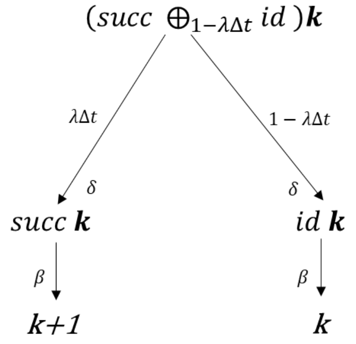


Слика 4. – Вјероватносно стабло редукција λ–терма за опис Поасоновог процеса за прелазе између стања у општем случају

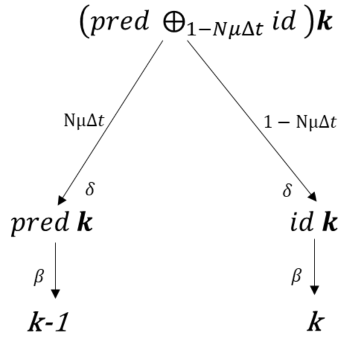
Интерпретација граничних случајева реализована је примјеном сљедећих λ–терма:

- ✓ $succ\ \oplus_{1-\lambda\Delta t}\ id$ – за почетно стање тј. ако је Черчов нумерал $\mathbf{0}$
- ✓ $pred\ \oplus_{1-N\mu\Delta t}\ id$ – за стање блокирања, односно ако је Черчов нумерал $\boldsymbol{n}$

Вјероватносна стабла редукција за λ–терме који описију граничне случајеве приказана су на Сл. 5. и Сл. 6.



Слика 5. – Вјероватносно стабло редукција λ–терма за опис Поасоновог процеса за прелазак из почетног у наредно стање



Слика 6. – Вјероватносно стабло редукција λ–терма за опис Поасоновог процеса за прелазак из стања блокирања у наредно стање

λ–термима за контролу тока могуће је извршити избор примјене једног од λ-терма:

- ✓ $M \equiv succ\ \oplus_{1-\lambda\Delta t}\ id$
- ✓ $N \equiv pred\ \oplus_{1-N\mu\Delta t}\ id$
- ✓ $L \equiv \left(succ \oplus_{\frac{k\mu\Delta t}{\lambda\Delta t+k\mu\Delta t}} pred\right)\oplus_{1-\lambda\Delta t-k\mu\Delta t} id$

у зависности од вриједности Черчовог нумерала $\boldsymbol{k}$.

λ–терм (29):

$$\Big((isZero\ \boldsymbol{k})M\big((eq\ \boldsymbol{n}\ \boldsymbol{k})NL\big)\Big)\boldsymbol{k} \qquad (29)$$

у потпуности описује Поасонов процес у телесаобраћају. Заиста, $isZero\ \boldsymbol{k}$ ће вратити T за $\boldsymbol{k} \equiv \mathbf{0}$, те његова примјена на $M\big((eq\ \boldsymbol{n}\ \boldsymbol{k})NL\big)$ резултоваће λ–термом:

$$M \equiv succ \oplus_{1-\lambda\Delta t} id$$

У противном, за $\boldsymbol{k} \not\equiv \boldsymbol{0}$, вриједиће да је $isZero\ \boldsymbol{k} \equiv F$, те његовом примјеном на $M\big((eq\ \boldsymbol{n}\ \boldsymbol{k})NL\big)$ извршиће се редукција на $(eq\ \boldsymbol{n}\ \boldsymbol{k})NL$. Даље, λ–термом $(eq\ \boldsymbol{n}\ \boldsymbol{k})$, гдје је $\boldsymbol{n}$ Черчов нумерал који симболизује стање блокирања – реализацију максималаног броја позива, врши се испитивање услова да ли је $\boldsymbol{k} \equiv \boldsymbol{n}$, те уколико је услов испуњен, тада $(eq\ \boldsymbol{n}\ \boldsymbol{k})$ постаје T, однсосно F ако није. У зависности од задовољења услова, примјена $(eq\ \boldsymbol{n}\ \boldsymbol{k})$ на NL редукује се на λ–терм $N \equiv pred \oplus_{1-N\mu\Delta t} id$ ако је услов задовољен, односно на

$$L \equiv \left(succ \oplus_{\frac{k\mu\Delta t}{\lambda\Delta t+k\mu\Delta t}} pred\right) \oplus_{1-\lambda\Delta t-k\mu\Delta t} id \quad \text{ако је } \boldsymbol{k} \not\equiv \boldsymbol{n}.$$

VI. Закључак

Важно је истаћи да вјероватносно стабло редукција које је конструисано у раду, а које јасно приказује прелазак између сусједних стања система, омогућава формалан начин праћења промјене броја позива у систему у временским интервалима, узимајући у обзир вјероватноће долазних позива, њихових прекида и задржавања у тренутном стању. Сваки чвор у стаблу представља један λ–терм којим се описује стање система, а гране између чворова одражавају вјероватноћу преласка из једног стања у друго. Овакав приступ, не само да пружа увид у тренутно стање система, већ омогућава и анализу токова догађаја у времену.

Може се примјетити да λ–рачун представља снажан формални основ за изражавање и анализу математичких концепата, док проширење у вјероватносни λ–рачун омогућава моделовање и разумијевање вјероватносних процеса. Поасонов процес, као један од кључних концепата у теорији телесаобраћаја обезбјеђује алат за анализу протока позива, вјероватноће блокирања и других важних перформанси телекомуникационог система. Интеграција λ–рачуна у ову анализу даје теоријски оквир за разумијевање и оптимизацију телекомуникационих мрежа.Садржај овог рада не доприноси само разумијевању Поасоновог процеса у теорији телесаобраћаја, него указује на потенцијал за даља истраживања у области λ–рачуна и његове примјене у различитим дисциплинама.

Узимајући у обзир све аспекте, закључује се да λ–рачун као формални језик остаје моћно средство за анализу и моделовање различитих математичких и техничких система, од апстрактних теоријских концепата до реалних апликација у телекомуникацијама.

Литература

[1] M. K. Banjanin, Komunikacioni inženjering, Doboj: Univerzitet u Istočnom Sarajevu, Saobraćajno – tehnički fakultet Doboj, 2007.

[2] M. K. Banjanin, Naučnoistraživačka metodologija, 2. izdanje, Beograd: DisPublic, 2008.

[3] С. Прокић “Вероватносно закључивање у израчунавању и теорији функционалних типова”, докторска дисертација, Нови Сад: Факултет техничких наука Универзитета у Новом саду, 2023.

[4] M. Stojčić, M. K. Banjanin, M. Vasiljević, D. Nedić, A. Stjepanović, D. Danilović and G. Puzić, “Predictive modeling of delay in an LTE Network by optimizing the number of predictors using dimensionality reduction techniques”, *Applied Sciences*, vol. *13*(14), 8511, July 2023.

[5] Z. Ognjanović, N. Krdžavac, Uvod u teorijsko računarstvo, Beograd – Kragujevac, 2004.

[6] B. Kišić, “Lambda račun s primjerima u programskom jeziku Pyton”, master rad, Zagreb: Sveučilište u Zagrebu, Fakultet organizacije i informatike, jun 2013.

[7] O. Kiselyov, “Many more predecessors: A representation workout”, Cambridge University Press, Journal of Functional Programming, vol. 30, 2020.

[8] S. Lovnički, “Interpreter za λ–račun”, master rad, Zagreb: Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, septembar 2018.

[9] П. Младеновић, Вероватноћа и статистика, Београд: ВЕСТА – Математички факултет, 1995.

[10] A. Di Pierro, C. Hankin, H. Wiklicky “Probabilistic λ–calculus and quantitative program analysis”, Journal of Logic and Computation, vol. 15 pp. 159-179. April 2005.

[11] M. K. Banjanin, M. Stojčić, D. Danilović, Z. Ćurguz, M. Vasiljević and G. Puzić, “Classification and prediction of sustainable quality of experience of telecommunication service users using machine learning models”, *Sustainability*, vol. 14(24), 17053, December 2022.

[12] V. B. Iversen, Teletraffic engineering and network planning, Copenhagen: DTU Fotonik, 2015.

[13] M. K. Banjanin, M. Stojčić, D. Drajić, Z. Ćurguz, Z. Milanović, and A. Stjepanović, “Adaptive Modeling of Prediction of Telecommunications Network Throughput Performances in the Domain of Motorway Coverag” , *Applied Sciences*, vol. *11*(8), 3559, 2021.

[14] E. Klebečko, “Redovi čekanja i njihove primene”, master rad, Novi Sad: Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno – matematički fakultet, 2012.

ABSTRACT

This paper presents a method for integrating fundamental concepts of λ-calculus and Poisson processes in the analysis of telecommunication systems. The research goal defines a formal framework for modeling and understanding the number of incoming calls, blocking probabilities, and the level of teletraffic service. λ-calculus, as a formal language for computing functions, utilizes λ-terms to represent expressions and manipulate functions. The formal language is oriented towards probabilistic λ-calculus by introducing operators for probability distribution functions for standard λ-terms. The focus is on the Poisson process in telecommunication networks, where the system's state is analyzed deterministically by the number of realized calls. Event modeling, such as incoming calls, interruptions, and time spent in the system, are realized through λ-terms and the construction of a probability reduction tree. The construction of the probability reduction tree illustrates changes in the system's state during a small time period, providing a formal insight into the flows of complex events in teletraffic.

Keywords - conceptual analysis; λ-calculus; probabilistic λ-calculus; Poisson process in teletraffic theory.

Conceptual Analysis of the Poisson Process in Teletraffic Theory through a Unified Approach $\boldsymbol{\lambda}$-calculus and Probability Theory

Милан Васиљевић
Милорад К. Бањанин
Александар Стјепановић
Мирко Стојчић
Драгана Недић