

Primena Padé-ove aproksimacije za ubrzanje algoritama obrade signala u problemima atmosferskih pražnjenja

Dragan Pavlović
LOLA Institut

Beograd, Srbija
dragan.pavlovic@li.rs

Tomislav Šekara, Jovan Cvetic
Univerzitet u Beogradu
Elektrotehnički fakultet
Beograd, Srbija
tomi@etf.rs, cvetic_j@etf.bg.ac.rs

Sažetak—Proces generisanja struje pri povratnom udaru atmosferskog pražnjenja je opisan inženjerskim modelom putujućeg strujnog izvora. Postupak rada sa ovim modelom se svodi na izračunavanje funkcije pražnjenja kanala koja je opisana sa Volterinom integralnom jednačinom prve vrste. Zatim se ova funkcija koristi za izračunavanje odgovarajućih fizičkih veličina vezanih za dinamiku kanala atmosferskog pražnjenja. U radu je prikazana primena Padé-ove aproksimacije i Laplasove transformacije za aproksimativno analitičko izračunavanje funkcije pražnjenja kanala. Izvršena je provera rezultata proračuna.

Ključne reči – atmosfersko pražnjenje, povratni udar, inverzna Laplasova transformacija, Padé-ova aproksimacija, Meijer-ova G funkcija; (key words)

I. UVOD

Iako atmosfersko pražnjenje predstavlja jedno od najčešćih električnih pražnjenja u prirodi, izuzetno je teško matematički modelovati fiziku koja se odvija u kanalu atmosferskog pražnjenja. Razlog je to što postoji dosta složenih fizičkih procesa koji se odvijaju istovremeno. Jedan od pristupa koji se koristi u poslednje vreme je da se za opis procesa u kanalu atmosferskog pražnjenja koriste inženjerski modeli povratnog udara [1]. Opravdanost ovog pristupa je potvrđena eksperimentalno.

Za matematičko modelovanje električnih procesa u kanalu atmosferskog pražnjenja korišćen je GTCS model (the generalized lightning traveling current source return stroke model) [2]-[3]. Osnovna stvar u radu sa ovim modelom je precizno izračunavanje funkcije pražnjenja iz Volterine integralne jednačine prvog reda [2]. Zatim se ova funkcija koristi za proračun odgovarajućih fizičkih veličina vezanih za dinamiku kanala atmosferskog pražnjenja [1].

Najčešće korišćeni postupak za rešavanje linearne Volterine integralne jednačine prvog reda je primena Laplasove transformacije [4]. Pri rešavanju ovog tipa jednačine, javljaju se dva problema: nalaženje direktne Laplasove transformacije preko poznatih funkcija, koje u opštem slučaju nije moguće i nalaženje inverzne Laplasove transformacije rešenja [5], [14].

Zbog složenosti, odnosno nemogućnosti izračunavanja inverzne Laplasove transformacije rešenja u analitičkom obliku

u disertaciji [1] primenjen je Gaver-Štefesov algoritam za njeno izračunavanje.

Analitičko rešavanje problema koji su modelovani matematičkim modelima, zahteva izvesna pojednostavljenja (aproksimacije), zbog matematičke složenosti [6]. Tako da je u ovom radu pod određenim uslovima primenom Padé-ove aproksimacije u s-domenu pojednostavljeno izračunavanje inverzne Laplasove transformacije rešenja u analitičkom obliku koje je praktično uporedivo po tačnosti sa vremenskim oblikom signala dobijenim u [1].

Rad je podeljen u tri poglavlja sa uvodom, zaključkom i literaturom. U drugom poglavlju je prikazan matematički model fizičkog procesa koje treba rešiti kao i pregled problema pri njegovom rešavanju. Takođe, naveden je prethodni (numerički) metod koji se koristio za nalaženje inverzne Laplasove transformacije. U trećem poglavlju, data je primena Padé-ove aproksimacije za izračunavanje funkcije električnog pražnjenja u kanalu munje [7]-[8]. Četvrto poglavlje predstavlja proceduru primene ovog algoritma na dati problem sa odgovarajućim simulacijama.

II. POSTAVKA PROBLEMA

Funkcija pražnjenja kanala izračunava se iz jednačine (1):

$$i_0(t) = \int_0^{v^*} q'_0(z) \cdot \frac{\partial}{\partial t} f(t - z/v^*) dz, \quad (1)$$

gde je $f(t - z/v^*)$ funkcija pražnjenja kanala, dok su $i_0(t)$ struja u tački udara i $q'_0(z)$ poduzna gustina naelektrisanja [2].

Ova jednačina je nelinearna, nehomogena Volterina integralna jednačina prve vrste. Ovo je slabo uslovljen problem, što znači da su rešenja jednačine u opštem slučaju nestabilna. To znači da mala odstupanja u ulaznim veličinama mogu da dovedu do divergencije rešenja. Shodno tome, zbog velike osetljivosti numeričkog rešenja, postavlja se pitanje njegove pouzdanosti, pa se za rešenje datog problema koriste analitičke metode čija rešenja [9] su iskazana preko specijalnih funkcija. U disertaciji [2] detaljno su opisane funkcije koje se koriste za modelovanje struje u tački udara, kao i za modelovanje poduzne količine naelektrisanja. Funkcije $i_0(t)$ i

$q'_0(z)$ su realne fizičke veličine, a funkcija pražnjenja koju računamo je fiktivna veličina koja je proizašla iz GTCS modela [2].

Volterina integralna jednačina posle uvođenja određenih transformacija [8], se može pojednostaviti tako da postaje integralna jednačina konvolucionog tipa:

$$i(t) = \int_0^t q(\tau) f_1(t-\tau) \cdot d\tau = \int_0^t q(t-\tau) f_1(\tau) \cdot d\tau, \quad (2)$$

gde su $i(t) = i_0(t)/v^*$ и $q(\tau) = q'_0(z = v^* \tau)$.

Kada se na integralnu jednačinu konvolucionog tipa (2) primeni Laplasova transformacija, dobija se:

$$I(s) = Q(s) \cdot F_1(s), \quad (3)$$

gde su $I(s)$, $Q(s)$ и $F_1(s)$ Laplasove transformacije funkcija $i(t)$, $q(t)$ и $f_1(t)$, respektivno. Na osnovu tablica Laplasove transformacije datih u [10] (formula 8 na strani 21), funkciju $g(x) = x^\mu (x^{l/k} + z)^\nu$ se transformiše u oblik dat izrazom

$$\frac{(z/k)^\nu l^{\mu+1/2}}{(2\pi)^{(l-1)/2} \Gamma(-\nu) p^{\mu+1}} \times G_{k+l, k}^{k, k+l} \left(\frac{l^l}{p^l z^k} \left| \begin{matrix} \Delta(l, -\mu), \Delta(k, \nu+1) \\ \Delta(k, 0) \end{matrix} \right. \right), \quad (4)$$

gde je $\Delta(r, a) = \frac{a}{r}, \frac{a+1}{r}, \dots, \frac{a+r-1}{r}$ и $G_{m,n}^{p,q} \left(z \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right)$ Meijer-ova G funkcija [10]-[11] koja je objašnjena u Dodatak-u.

Opšti oblik struje $i(t)$ u vremenskom domenu je [2], [15]:

$$i(t) = \frac{I_0}{\eta \cdot v^*} \cdot \frac{\left(\frac{t}{\tau_1} \right)^n}{1 + \left(\frac{t}{\tau_1} \right)^n} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_2}}, \quad (5)$$

Funkcija struje $i(t)$ se preslikava u kompleksni domen $I(s)$, pomoću (4) uključujući i osnovna pravila Laplasove transformacije. Uzimajući sledeće parametre na osnovu (4) и (5), $z=1$, $n=\mu=5$, $l=4$, $k=1$, $\nu=-1$, dobija se $p = (\tau_1 \cdot (s + \tau_2^{-1}))$, odnosno:

$$I(s) = \frac{\tau_1 I_0 \left(\frac{z}{k} \right)^\nu l^{\mu+1/2} \text{MeijerG} \left(\left[\begin{matrix} -5/5, -4/5, -3/5, -2/5, -1/5, 0, \dots \end{matrix} \right], \left[\begin{matrix} 0, \dots \end{matrix} \right], \frac{l^l}{z^k p^l} \right)}{\eta \cdot v^* \cdot (2\pi)^{\left(\frac{l-1}{2} \right)} \Gamma(-\nu) p^{(\mu+1)}} \quad (6)$$

Opšti oblik funkcije $q(t)$ u vremenskom domenu je:

$$q(t) = Q_0 \cdot \left(g(t) + \frac{\lambda_{d1}}{v^*} \cdot g'(t) + \frac{\lambda_{d2}}{v^{*2}} \cdot g''(t) \right), \quad (7)$$

pri čemu je opšti oblik funkcije $g(t)$ u vremenskom domenu dat kao:

$$g(t) = \frac{\left(\frac{t}{\tau_1} \right)^m}{1 + \left(\frac{t}{\tau_1} \right)^m} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_2}}, \quad (8)$$

Funkcije $g(t)$ je preslikana u kompleksni domen $G(s)$, koristeći pravilo (4), uzimajući u obzir sledeće parametre $z=1$, $m=\mu=4$, $l=5$, $k=1$, $\nu=-1$, $p = (\tau_1 \cdot (s + \tau_2^{-1}))$:

$$G(s) = \frac{\tau_1 \left(\frac{z}{k} \right)^\nu l^{\mu+1/2} \text{MeijerG} \left(\left[\begin{matrix} -4/4, -3/4, -2/4, -1/4, 0, \dots \end{matrix} \right], \left[\begin{matrix} 0, \dots \end{matrix} \right], \frac{l^l}{z^k p^l} \right)}{(2\pi)^{\left(\frac{l-1}{2} \right)} \Gamma(-\nu) p^{(\mu+1)}}. \quad (9)$$

Preslikavanjem funkcije struje $q(t)$ u Laplasov domen se radi po formuli:

$$Q(s) = Q_0 \cdot \left(G(s) + \frac{\lambda_{d1}}{v^*} \cdot (sG(s) - g(0)) + \frac{\lambda_{d2}}{v^{*2}} \cdot (s^2G(s) - sg(0) - g'(0)) \right), \quad (10)$$

Konačni rezultat se dobija korišćenjem izraza za inverznu Laplasovu transformaciju

$$f_1(t) = L^{-1} \{ F_1(s) \} (t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{st} F_1(s) ds, \quad (11)$$

gdje je $F_1(s) = I(s)/Q(s)$. Inverzna Laplasova transformacija funkcije $F_1(s)$ se ne može izraziti u zatvorenom analitičkom obliku. Primenom numeričkih metoda na izračunavanje inverzne Laplasove transformacije na relaciju (11) na primer Gaver-ovog algoritma [1] je to što može da zahteva dugo vreme računanja. Rad [12] predstavlja pokušaj da se ovaj problem prevaziđe.

III. PADEOVA APROKSIMACIJA

U matematičkoj analizi, Padé-ova aproksimacija [7]-[8] predstavlja metodu za racionalne aproksimacije analitičkih funkcija bilo da se radi u kompleksnom ili vremenskom domenu. Metod podrazumeva racionalnu aproksimaciju funkcije $F(s)$ u okolini tačke razvoja $s = s_0$. Tako da je Padé-ova aproksimacija, na primer, funkcije $F(s) = A_M(s)/B_N(s) + \varepsilon(s)$, odnosno:

$$F^{PA[M,N]}(s) = \frac{A_M(s)}{B_N(s)} = \frac{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_Ms^M}{1 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_Ns^N} \quad (12)$$

gde se vrednosti nepoznatih koeficijenata polinoma $A_M(s)$ и $B_N(s)$ dobija korišćenjem Tejlorovog razvoja [7]-[8] funkcije:

$$F^{TS}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k s^k, \quad c_k = \frac{1}{k!} \cdot \frac{d^k}{ds^k} \cdot F(s) \Big|_{s=s_0}, \quad (13)$$

i na osnovu relacije:

$$F^{TS}(s) = F^{PA[M,N]}(s) + O(s^{M+N+1}). \quad (14)$$

Padé-ova aproksimacija se dobija iz (12) i (13), podudaranjem $M+N+1$ koeficijenata $F^{TS} \cdot B_N(s)$ sa $A_M(s)$ [8]. Stoga se nepoznati koeficijenti određuju kao rešenje skupa linearnih jednačina datih u matricnoj formi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L & 0 & 0 & L & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L & -c_0 & 0 & L & 0 \\ M & M & 0 & & M & M & M & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -c_{M-1} & -c_{M-2} & L & -c_{M-N} \\ 0 & 0 & 0 & L & -c_M & -c_{M-1} & L & -c_{M-N+1} \\ 0 & 0 & 0 & L & -c_{M+1} & -c_M & L & -c_{M-N+2} \\ M & M & M & M & M & M & O & M \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{M+N-1} & -c_{M+N-2} & L & -c_M \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_M \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_M \\ c_{M+1} \\ c_{M+2} \\ \vdots \\ c_{M+N} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

IV. REZULTATI I DISKUSIJA

Volterina integralna jednačina je analitički rešena za veliki broj primera. U ovom radu smo predstavili rezultat za slučaj dat u [8] koji je dobijen novom metodom. Podaci koji su korišćeni u ovom primeru su dati u Tabeli 1.

TABELA I. PODACI ZA REŠAVANJE JEDNAČINE (1)

Predložene vrednosti konstanti	Vrednosti
I_0 [A]	13000
n	5
η	0,87
τ_1 [s]	$0,24 \cdot 10^{-6}$
τ_2 [s]	$3,4 \cdot 10^{-6}$
τ_{d1} [s]	$6 \cdot 10^{-7}$
Q'_0 [Cm]	$-1,885 \cdot 10^{-4}$
λ_1 [m]	9
λ_2 [m]	255
λ_{d1} [m]	45
λ_{d2} [m]	0
m	4

Sledeći prethodno datu proceduru dobija se:

$$F_1(s) = \frac{I(s)}{Q(s)}. \quad (16)$$

Za dobijanje rezultata primenjujemo Padé-ovu aproksimaciju funkcije $F_1(s)$ u okolini $s=0$. Na osnovu iskustva su uzeti koeficijenti $M=2$ i $N=4$, a kao rezultat se dobija aproksimativni izraz $F_{1N}(s) = F_1^{PA[2,4]}(s)$:

$$F_{1N}(s) = -\frac{a_0 + a_1 \cdot s + a_2 \cdot s^2}{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + b_3 s^3 + b_4 s^4}, \quad (17)$$

gde su vrednosti koeficijenata date u Tabeli II:

TABELA II. VREDNOST KOEFICIJENATA U JEDNAČINI (17)

Koeficijenti	Vrednosti
a_0	1,05967651
a_1	$0,26241392 \cdot 10^{-5}$
a_2	$0,30984355 \cdot 10^{-12}$
b_0	1
b_1	$0,30687307 \cdot 10^{-5}$
b_2	$0,17584461 \cdot 10^{-11}$
b_3	$0,17248547 \cdot 10^{-18}$
b_4	$0,31466703 \cdot 10^{-26}$

Primenom inverzne Laplasove transformacija funkcije $F_{1N}(s)$, dobija se aproksimativno rešenje $f_1(t) = L^{-1}\{F_{1N}(s)\}$:

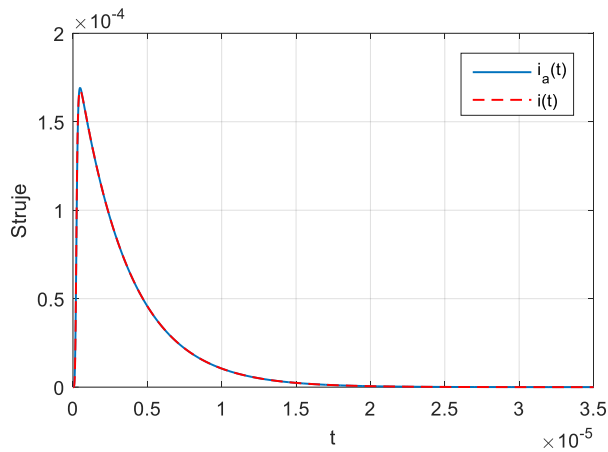
$$f_1(t) = -(k_1 \cdot e^{-k_2 t} + k_3 \cdot e^{-k_4 t} + k_5 \cdot e^{-k_6 t} + k_7 \cdot e^{-k_8 t}), \quad (18)$$

Vrednosti koeficijenata iz jednačine (18) date u Tabeli III:

TABELA III. PODACI ZA REŠAVANJE JEDNAČINE (18)

Koeficijenti	Vrednosti
k_1	$-0,26375563 \cdot 10^7$
k_2	$0,42082251 \cdot 10^8$
k_3	$0,90576638 \cdot 10^6$
k_4	$0,10638159 \cdot 10^8$
k_5	$0,17317901 \cdot 10^7$
k_6	$0,16696618 \cdot 10^7$
k_7	$-0,22419597$
k_8	$0,42516233 \cdot 10^6$

Na kraju, potrebno je proveriti dobijeni rezultat $f_1(t)$ kroz konvoluciju sa funkcijom $q(t)$ koristeći jednačinu (2). Kao rezultat konvolucije dobija se aproksimativna funkcija struje $i_a(t)$ koju je potrebno porediti sa polaznom strujom $i(t)$. Dobijeni rezultati simulacije su prikazani na slici 1.



Slika 1. Poređenje grafika struje $i(t)$ i aproksimativne struje $i_a(t)$ dobijene konvolucijom funkcije $q(t)$ i aproksimativnog rešenja $f_1(t)$.

Slika 1 potvrđuje tačnost aproksimativne metode. U literaturi postoje razvijeni brojni numerički algoritmi koji nalaze inverznu Laplasovu transformaciju [12]-[13], pa se dobijeni analitički rezultat može porediti sa više metoda.

V. ZAKLJUČAK

Nova metoda, odnosno algoritam za izračunavanje funkcionalne zavisnosti električnog pražnjenja u kanalu munje od vremena primenom Pade-ove aproksimacije je dala adekvatne rezultate koji su praktično uporedivi po tačnosti sa vremenskim oblikom signala dobijenim drugim algoritmima. Osim toga prednost novog algoritma je u njegovoj mnogo većoj brzini numeričkog izračunavanja u odnosu na druge algoritme u ovoj oblasti. Ovo ukazuje na dalje istraživanje odgovarajućih aproksimacija u datim i sličnim problemima matematičke fizike.

DODATAK

Specijalna Meijer G-funkcija je definisana krivolinijskim integralom u kompleksnoj ravni (videti [11, strana 207]):

$$G_{p,q}^{m,n} \left(z \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) \equiv G_{p,q}^{m,n} \left(z \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_n; a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_m; b_{m+1}, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) \quad (D1)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{v=1}^m \Gamma(b_v - s) \prod_{v=1}^n \Gamma(1 - a_v + s)}{\prod_{v=m+1}^q \Gamma(1 - b_v + s) \prod_{v=n+1}^p \Gamma(a_v - s)} \cdot z^s ds$$

gde je L putanja integracije, a $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx$ je Gamma funkcija.

ZAHVALNICA

Ovaj rad je podržan od strane Ministarstva prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Republike Srbije.

LITERATURA

- [1] D. Pavlović, "Plasma channel evolution in the triggered lightning discharges," Doctoral dissertation, University of Belgrade, September 2019.
- [2] J.M. Cvetić, "Model povratnog udara atmosferskog pražnjenja sa specificiranom strujom u tački udara i raspodelom naelektrisanja duž kanala," doktorska disertacija, Elektrotehnički fakultet Univerziteta u Beogradu, Srbija, jul 1996.
- [3] V. A. Rakov, M.A Uman, "Lightning, Physics and Effects". Cambridge University Press, Cambridge 2007.
- [4] P. Linz, "Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations". Society for Industrial and Applied Mathematics, January 1987.
- [5] A. M. Cohen, "Numerical methods for Laplace transform inversion", Springer, New York, 2007.
- [6] J. Mikulović, T. Šekara, "Proračun prenapona u energetskim transformatorima primenom numeričke metod inverzne Laplasove transformacije," 57. Konferencija ETRAN, Ref. EK2.4, Zlatibor, 3-6 jun 2013, ISBN 978-86-80509-68-6.
- [7] G.A. Baker, Essentials of Padé Approximants, Academic Press, New York, NY, USA, 1975.
- [8] M. Bošković, M. Rapačić, T. Šekara, P. Mandić, M. Lazarević, B. Cvetković, B. Lutovac, M. Daković, "On the rational representation of fractional order lead compensator using Padé approximation," 7th Mediterranean Conference on Embedded Computing (MECO), Budva, 2018, doi: 10.1109/MECO.2018.8405969.
- [9] D. Pavlovic, G. Milovanovic, J. Cvetic, "Calculation of the channel discharge function for the generalized lightning traveling current source return stroke model. FILOMAT, vol. 32, no.20, , 2018, pp. 6937-6951, doi: 10.2298/FIL1820937P.
- [10] P. Prudnikov, Yu.A. Brychkov, O.I. Marichev, "Integrals and Series, Vol. 4: Direct Laplace Transforms." Gordon and Breach, New York, 1992.
- [11] H. Bateman, A. Erdelyi, "Higher Transcendental Functions." Krieger Publishing Company, New York, 1981.
- [12] D. Pavlovic, T. Sekara, J. Cvetic "An improved Laplace transform method for the calculation of the lightning channel return stroke parameters", YOURS 2020, Belgrade, 28th September 2020.
- [13] Tomislav B. Šekara, Miomir S. Stanković, "Jedan numerički algoritam inverzne Laplasove transformacije sa primjenom u frakcionim sistemima" INFOTEH-JAHORINA, Vol. 3, March 2003, Ref. A-2, pp. 7-10.
- [14] G. V. Milovanovic and A. S. Cvetkovic, "Numerical inversion of the Laplace transform", Ser. Elec. Energ., vol. 18, No. 3, pp. 515-530, December 2005.
- [15] Heidler, F., Cvetic, J.M. and Stanic, B.V. (1999): Calculation of Lightning Current Parameters. IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 14, No.2, pp. 399-404.

ABSTRACT

The process of generation of the current in the lightning channel during the return stroke is described by the engineering traveling current source model. Method of work with this model comes down to calculation channel discharge function from Volterra integral equation of the first kind. Then, this function is used for calculation of all essential physical quantities related to lightning channel dynamics. The paper presents the application of Padé approximations and Laplace transforms for approximate calculation of the channel discharge function. The calculation results were checked.

APPLICATION OF PADE APPROXIMATION FOR ACCELERATION OF SIGNAL PROCESSING ALGORITHMS IN PROBLEMS OF ATMOSPHERIC DISCHARGE

Dragan Pavlović, Tomislav B. Šekara, Jovan Cvetić