

# Temperatura na površi provodnika sa vremenski promenljivom strujom

Karolina Kasaš-Lažetić, Gorana Mijatović, Dejana Herceg, Danka Antić

Departman za energetiku, elektroniku i telekomunikacije  
Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu  
Novi Sad, R. Srbija

[kkasas@uns.ac.rs](mailto:kkasas@uns.ac.rs), [gorana86@uns.ac.rs](mailto:gorana86@uns.ac.rs), [vuletic@uns.ac.rs](mailto:vuletic@uns.ac.rs),  
[danka.antic@uns.ac.rs](mailto:danka.antic@uns.ac.rs)

Miroslav Prša, penzionisan sa

Departmana za energetiku, elektroniku i telekomunikacije  
Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu  
Novi Sad, R. Srbija

[prsa@uns.ac.rs](mailto:prsa@uns.ac.rs)

**Sažetak**—U provodniku sa vremenski promenljivom strujom se odvijaju složeni procesi, koji direktno utiču na temperaturu provodnika. U ovom radu je prikazan postupak merenja temperature provodnika i odgovarajuća numerička obrada rezultata merenja. Opisan je proces od merenja karakteristika nepoznate sonde za merenje temperature, do konačnih rezultata – dijagrama zavisnosti temperature na površi provodnika od vremena, pri različitim efektivnim vrednostima jačine struje u provodniku. Prikaz rezultata merenja, kako merenja karakteristika temperaturne sonde, tako i merenja temperature na površi provodnika, je zahtevao korišćenje određenih numeričkih metoda, kao što su interpolacija i fitovanje izmerenih vrednosti u vremenskim dijagramima. Postupak je primenjen na tri bakarna provodnika i na jedan aluminijumski provodnik i konačni rezultati su prikazani grafički, u obliku vremenskih dijagrama.

**Ključne reči** - provodnik sa vremenski promenljivom strujom; temperaturna sonda; merenje temperature; (key words - conductor with AC current; temperature probe; temperature measurement)

## I. UVOD

Kada se u provodniku uspostavi električna struja, dolazi do pojave Džulovog efekta i do zagrevanja provodnika. Ova pojava je dobro poznata u elektrotehnici i vrlo je jednostavno odrediti snagu Džulovih gubitaka i energiju u toku određenog intervala vremena, u slučaju kada je električna struja vremenski konstantna. Međutim, u slučaju vremenski promenljivih struja, u provodniku dolazi do površinskog efekta i neravnomerne raspodele struje po poprečnom preseku provodnika, pa se problem dodatno komplikuje. Specifična otpornost provodnika se menja sa promenom temperature, što takođe utiče na raspodelu struje. Sve u svemu, cela pojava nije linearna, tako da je potreban veoma složen matematički aparat za određivanje raspodele temperature na površi provodnika, prouzrokovane složenim oblikom Džulovog efekta. Detaljniji opis događanja u provodniku sa vremenski promenljivom strujom, kao i opis neophodnog matematičkog aparata za rešavanje istraživog problema, će biti prikazani u narednom delu rada.

Karakteristike temperaturne sonde, korišćene za merenje temperature na površi provodnika su bile nepoznate, pa je bilo neophodno prvo odrediti te karakteristike i tek nakon toga je sonda mogla da se koristi za predviđena merenja.

Merenje temperature na površi provodnika je obavljeno na tri bakarna provodnika, različitih površina poprečnog preseka, kao i na jednom aluminijumskom provodniku. Numerička obrada izmerenih vrednosti je sprovedena pomoću programskog paketa MATLAB.

## II. DŽULOV EFEKT U PROVODNIKU SA VREMENSKI PROMENLJIVOM STRUJOM

Kada se u provodniku uspostavi vremenski promenljiva struja, dolazi do pojave površinskog efekta, odnosno, do neravnomerne raspodele struje po poprečnom preseku provodnika. U slučaju cilindričnog provodnika, kružnog poprečnog preseka, najpogodnije je problem prikazati i rešavati u cilindričnom koordinatnom sistemu, tako da se osa provodnika postavi u pravcu  $z$  koordinate usvojenog sistema. U tom slučaju, vektor jačine električnog polja u provodniku, kao i vektor gustine struje imaju samo  $z$  komponentu, a vektor magnetske indukcije ima samo  $\varphi$  komponentu. Sve ove veličine zavise samo od vremena,  $t$  i rastojanja od ose provodnika,  $r$  i ne zavise od koordinata  $\varphi$  i  $z$ . Prema tome, može da se piše da su vektori jačine električnog polja u provodniku, vektor gustine struje i vektor jačine magnetskog polja [1],

$$\begin{aligned}\vec{E}_{\text{u prov.}} &= \vec{i}_z \cdot E_z = \vec{i}_z \cdot E, \\ \vec{J} &= \vec{i}_z \cdot J_z = \vec{i}_z \cdot J, \\ \vec{H} &= \vec{i}_\varphi \cdot H_\varphi = \vec{i}_\varphi \cdot H.\end{aligned}\quad (1)$$

Ako je sredina linearna, a jačina struje u provodniku se menja u vremenu po prostoperiodičnom zakonu, za rešavanje problema može da se koristi kompleksna notacija. U tom slučaju, prve dve Maksvelove jednačine u kompleksnom skalarnom obliku glase,

$$-\frac{dE}{dr} = -j\omega\mu H, \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(rH) = J, \quad (2)$$

gde  $\omega$  predstavlja ugaonu učestanost izvora polja, a  $\mu$  permeabilnost sredine. Zamenom  $H$  iz prve jednačine u drugoj, dobija se parcijalna diferencijalna jednačina za prostornu raspodelu kompleksnog intenziteta vektora gustine struje,

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dJ}{dr} \right) = j\omega\mu\sigma J, \quad (3)$$

u kojoj  $\sigma$  predstavlja specifičnu provodnost posmatranog materijala.

Posle jednostavnog preuređivanja, ova jednačina može da se napiše u obliku [1],

$$\frac{d^2 J}{du^2} + \frac{1}{u} \frac{dJ}{du} + J = 0, \quad (4)$$

gde je,

$$\underline{u} = \sqrt{-j} \cdot s, \quad s = k'r, \quad k' = \sqrt{\omega\mu\sigma}. \quad (5)$$

Ova jednačina se naziva Beselova diferencijalna jednačina nultog reda, a rešenje ove diferencijalne jednačine, raspodela intenziteta vektora gustine struje po porečnom preseku provodnika, je izraženo preko Beselove funkcije,

$$\underline{J}(s) = \underline{J}(0) [\text{ber}(s) + j\text{bei}(s)], \quad (6)$$

gde  $\underline{J}(0)$  predstavlja intenzitet vektora gustine struje duž ose provodnika, a ber i bei realni i imaginarni deo Besselove funkcije.

Specifična otpornost provodnika se, više ili manje, menja sa temperaturom, a specifična otpornost provodnika, na nekoj temperaturi,  $\vartheta$ , za manje promene temperature, za vremenski konstantne struje, može da se izrazi kao [2],

$$\rho_{\vartheta} = \rho_0 (1 + \alpha\vartheta), \quad (7)$$

dok se za veće opsege temperatura koristi izraz [2],

$$\rho_{\vartheta} = \rho_0 (1 + \alpha\vartheta + \beta\vartheta^2 + \gamma\vartheta^3), \quad (8)$$

u kojem  $\rho_0$  predstavlja specifičnu otpornost materijala na  $0^\circ\text{C}$ , dok su  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  temperaturni koeficijenti materijala od koga je provodnik napravljen.

U slučaju vremenski promenljivih struja, izrazi za promene specifične otpornosti usled promene temperature mogu da se napišu u obliku [3],

$$\rho_{\vartheta} = \rho_0 [1 + \alpha_{20}(\vartheta - 20)] (1 + y_s + y_p), \quad (9)$$

ili, zapisano na drugi način [4],

$$\rho_{\vartheta} = k_1 k_2 \rho_{20} [1 + \alpha_{20}(\vartheta - 20)], \quad (10)$$

gde su  $y_s$  i  $k_1$  odgovarajući koeficijenti koji opisuju uticaj površinskog efekta na specifičnu otpornost materijala, koeficijent  $y_p$  opisuje uticaj efekta blizine a  $k_2$  uticaj gubitaka u feromagnetskim materijalima, ukoliko su prisutni.

Zapreminska gustina snage Džulovih gubitaka u svakoj tački provodnika (fizički maloj zapremini,  $dv$ ), može da se izrazi kao,

$$\frac{dP_J}{dv} = \vec{J} \cdot \vec{E} = JE = \rho J^2 = \sigma E^2. \quad (11)$$

Ukupna snaga Džulovih gubitaka može da se odredi integracijom izraza (11) po celokupnoj zapremini posmatranog provodnika,

$$P_J = \int_V \frac{dP_J}{dv} dv = \int_V JE dv = \int_V \rho J^2 dv = \int_V \sigma E^2 dv. \quad (12)$$

Energija, koja se, u toku vremenskog intervala  $t$  iz električne pretvori u toplotu, dobija se dodatnom integracijom izraza (12) po vremenu,

$$W_J = \int_0^t \int_V \frac{dP_J}{dv} dv dt = \int_0^t \int_V \rho J^2 dv dt = \int_0^t \int_V \sigma E^2 dv dt. \quad (13)$$

Raspodelu temperature po celoj zapremini provodnika prikazuje parabolična diferencijalna jednačina [5],

$$\psi c_p \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla T) = \dot{q}_v, \quad (14)$$

gde je  $\psi$  specifična masa provodnika,  $k$  je toplotna provodljivost provodnika,  $c_p$  je specifični toplotni kapacitet, a  $\dot{q}_v$  je zapreminska gustina energije izvora toplote.

Kao što se vidi iz prethodnih izraza, izračunavanje raspodele temperature po površi provodnika je veoma složen postupak, pošto energija Džulovih gubitaka zavisi od specifične otpornosti materijala, koja je funkcija temperature. Izrazitost površinskog efekta, preko konstante  $k'$ , takođe zavisi od specifične otpornosti provodnika, a time i raspodela struje po poprečnom preseku provodnika zavisi od temperature. Prema tome, ceo proces zagrevanja provodnika je nelinearan i sastoji se od mnogobrojnih međusobnih uticaja, te je proračun raspodele temperature, zbog toga, veoma složen i zahtevan proces. Mnogi gotovi računarski paketi, kao na primer, COMSOL [6], ili neki drugi postupci, [7] - [10], rešavaju i tako složene probleme, ali, zbog kompleksnosti cele problematike, proračuni raspodele temperature bi svakako zahtevali i eksperimentalnu proveru, odnosno merenje temperature provodnika. Zbog toga je, u okviru ovog istraživanja, odlučeno da se, za početak, izvrše merenja temperature samo na površi provodnika, što je neuporedivo jednostavnije od merenja u svim tačkama provodnika. Rezultati merenja, koji su prikazani u ovom radu, kasnije mogu da budu iskorišćeni za proveru rezultata računarskih postupaka.

### III. ODREĐIVANJE KARAKTERISTIKA TEMPERATURNE SONDE

Za merenje temperature na površi otpornika, na raspolaganju je bila temperaturna sonda u obliku cilindra, prečnika 6 mm i visine 12 mm. To su bili jedini poznati podaci o toj sondi. Da bi sonda mogla da se koristi za merenje temperature, prvo su morale da se odrede njene karakteristike.

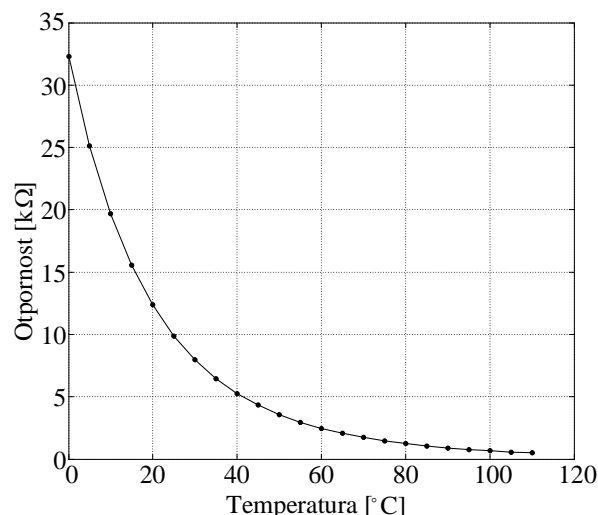
Prvo je trebalo ustanoviti da li se radi o aktivnoj sondi, termoparu ili se radi o termistoru, otporniku čija se otpornost menja sa temperaturom. Zagrevanjem sonde i merenjem napona na njenim priključcima, ustanovljeno je da se na priključcima ne pojavljuje napon, što znači da sonda radi na principu otpornosti, zavisne od temperature, odnosno, da sonda predstavlja termistor.

Nakon toga je bilo potrebno još samo precizno odrediti zavisnost otpornosti termistora od temperature i to je obavljeno u Kalibracionoj laboratoriji katedre za električna merenja, Fakulteta tehničkih nauka u Novom Sadu. Otpornost sonde je merena u spoju sa četiri priključka; dva naponska i dva strujna. Otpornost temperaturne sonde u zavisnosti od temperature je data u Tabeli I i grafički, na Sl. 1.

TABELA I. IZMERENE OTPORNOSTI TEMPERATURNE SONDE

Red. broj	Karakteristike temperaturne sonde		
	Nominalna temperatura [°C]	Izmerena temperatura [°C]	Izmerena otpornost sonde [kΩ]
1	0	0,03	32,298
2	5	5,03	25,124
3	10	10,08	19,702
4	15	15,02	15,567
5	20	20,02	12,390
6	25	25,07	9,891
7	30	30,07	7,971
8	35	35,07	6,465
9	40	40,08	5,274
10	45	45,08	4,328
11	50	50,09	3,569
12	55	55,10	2,956
13	60	60,10	2,466
14	65	65,10	2,065
15	70	70,17	1,733
16	75	75,18	1,464
17	80	80,17	1,243
18	85	85,19	1,055
19	90	90,18	0,902
20	95	95,19	0,776
21	100	100,18	0,669
22	105	105,18	0,556
23	110	110,19	0,503

Za zadavanje i održavanje konstantne temperature unutar komore, u koju je postavljena temperaturna sonda nepoznatih karakteristika, korišćen je FLUKE 9103 Dry-well Calibrator, kojim se menja temperatura u komori u opsegu od -25 °C do 140 °C, a za merenje otpornosti sonde je korišćen instrument FLUKE 8846a Precision Multimeter.

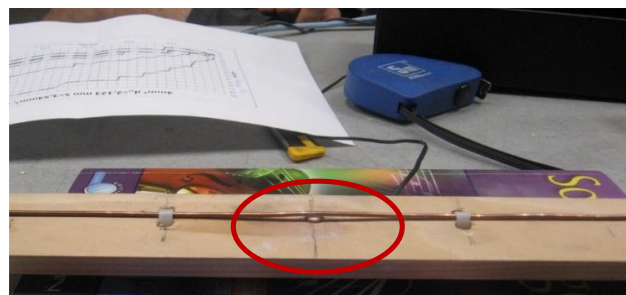


Slika 1. Zavisnost otpornosti sonde od temperature.

Analizirajući Sl. 1, može da se zaključi da je sonda napravljena od materijala, koji ima negativni temperaturni koeficijent. Osim toga, kriva prikazana na Sl. 1 je veoma glatka, tako da nema potrebe za korišćenjem bilo kakvih numeričkih procedura, nije potrebno fitovanje krive.

### IV. MERENJE TEMPERATURE NA POVRŠI PROVODNIKA

Za merenje temperature na površi provodnika, napravljen je nosač od drveta, na koji se pričvrsti provodnik. Kroz nosač je izbušena rupa od 6 mm, u koju je postavljena temperaturna sonda, namazana termoprovodljivom pastom. Prikaz konstruisanog sistema za merenje je prikazan na Sl. 2.



Slika 2. Konstruisani uređaj za merenje temperature provodnika.

Za merenje temperature na površi provodnika, izabrana su tri bakarna provodnika površina poprečnih preseka,  $\Phi 4 \text{ mm}^2$ ,  $\Phi 6 \text{ mm}^2$  i  $\Phi 10 \text{ mm}^2$ , kao i jedan aluminijumski provodnik površine poprečnog preseka,  $\Phi 7,8 \text{ mm}^2$ .

U postupku merenja su korišćeni sledeći merni instrumenti: kao generator struje korišćen je uređaj napravljen u firmi

„d.o.o. Energobul“ iz Novog Sada, koji može da obezbedi prostoperiodičnu struju jačine do 180 A, za merenje efektivne vrednosti jačine struje su korišćena strujna klešta Maxwell MC-25 603, za merenje otpornosti sonde (ponovo korišćenjem veze sa 4 priključka) je korišćen instrument FLUKE 8846a Precision Multimeter, dok je za merenje vremena upotrebljen tajmer mobilnog telefona.

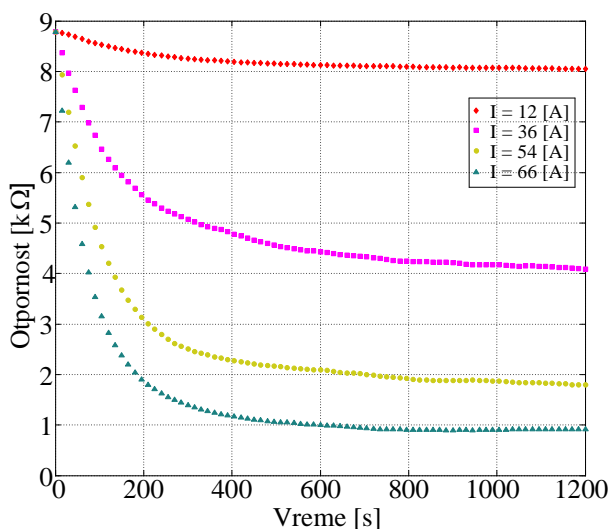
Temperature na površi svakog od provodnika su merene za 10 ili 11 različitih efektivnih vrednosti jačina struja, svakih 15 sekundi, u ukupnom vremenskom intervalu od 20 ili 30 minuta.

Prilikom merenja temperature pri manjim jačinama struja, nije dolazilo do značajnijeg zagrevanja provodnika, pa su merenja mogla da se izvode u kontinuitetu. Međutim, pri većim jačinama struja je dolazilo do sve izrazitijeg zagrevanja provodnika, pa je, pre merenja pri narednoj jačini struje, mereni provodnik morao da se ohladi, što je rađeno pomoću ventilatora, sve dok temperatura provodnika nije dostigla istu početnu vrednost, jedinstvenu za sva merenja.

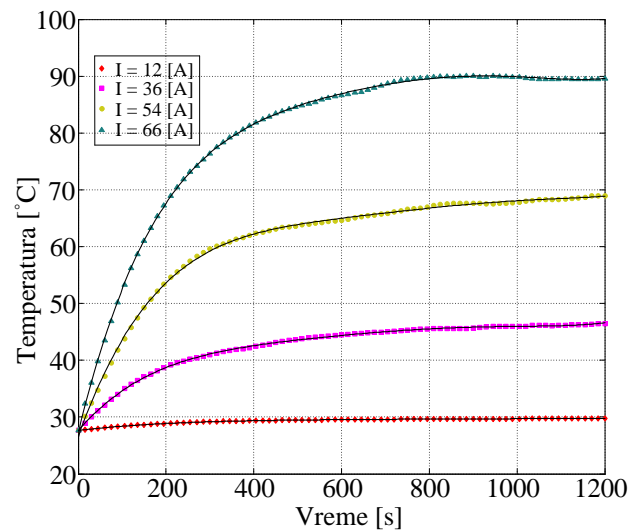
Kao primer rezultata merenja, na Sl. 3 su prikazane izmerene vrednosti otpornosti temperaturene sonde, za bakarni provodnik površine poprečnog preseka  $\Phi$  6 mm<sup>2</sup>. Da bi slika bila preglednija, otpornosti NTC sonde su prikazane za samo 4 različite efektivne vrednosti jačine struje, a izmereni vremenski dijagrami temperatura, za sve provodnike i sve zadate jačine struja, će biti prikazani u narednom delu ovog rada.

Iz podataka prikazanih na Sl. 3, numeričkom interpolacijom pomoću dijagrama sa Sl. 1, određene su vrednosti temperature na površi provodnika, za svaku pojedinačnu izmerenu tačku. Interpolacija je urađena korišćenjem programa MATLAB, pomoću funkcije „interp1“. Upotrebljenom interpolacijom se, za odgovarajuće vrednosti otpornosti sonde, dobijaju vrednosti temperature na površi provodnika. Dobijene vrednosti pojedinih tačaka su prikazane na Sl. 4.

Zbog nesavršenosti postupka merenja, dobijene krive nisu glatke kao što je očekivano, već vrednosti temperature u pojedinim tačkama odstupaju od pravih vrednosti.



Slika 3. Vremenski dijagram otpornosti sonde, za 4 različite jačine struja.



Slika 4. Vremenski dijagram temperature sonde, za 4 različite jačine struja.

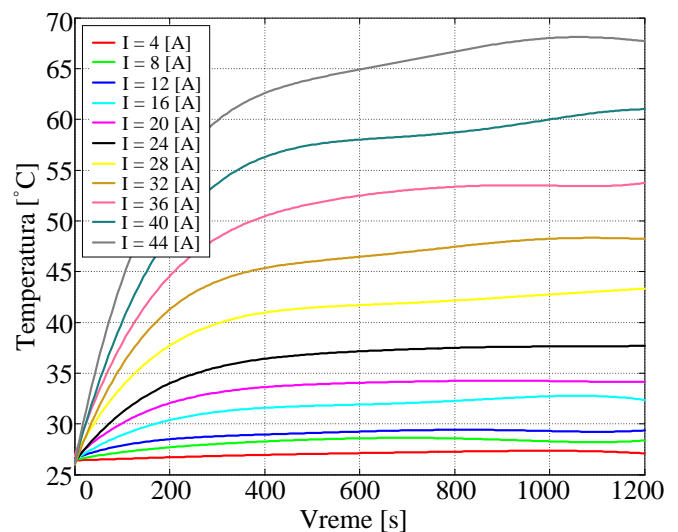
Da bi se dobile glatke krive, izvršeno je fitovanje kroz tačke prikazane na Sl. 4 i tako dobijene krive su na Sl. 5 prikazane punim crnim linijama za svaku jačinu struje.

Fitovanje je izvršeno splajnom, pri čemu su najbolji rezultati, za sve provodnike i sve jačine struja dobijeni izborom da je koeficijent „n“ jednak 5,  $n = 5$ .

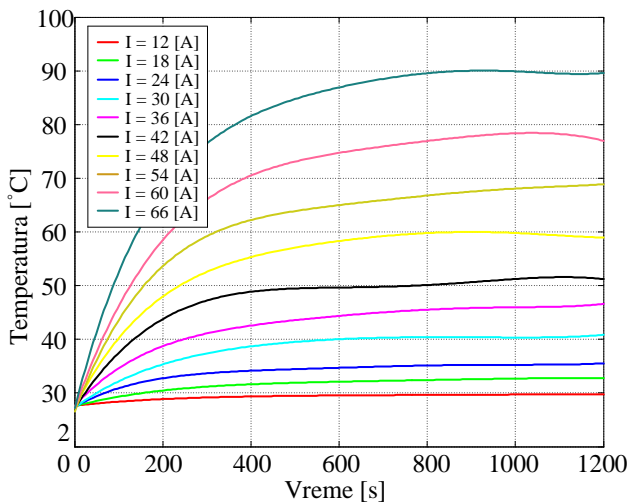
Postupak je zatim ponovljen za sve provodnike i sve jačine struja u njima.

## V. REZULTATI MERENJA

Rezultati merenja temperature na površi provodnika su dati na slikama od 5 do 8. Na Sl. 5 je prikazana temperatura na bakarnom provodniku najmanjeg poprečnog preseka,  $\Phi$  4 mm<sup>2</sup>, za 11 različitih jačina struja, dok su na Sl. 6 prikazane temperature na površi provodnika površine poprečnog preseka  $\Phi$  6 mm<sup>2</sup>, za 10 različitih jačina struja u provodniku.



Slika 5. Vremenski dijagram temperature na površi provodnika  $\Phi$  4 mm<sup>2</sup>.



Slika 6. Vremenski dijagram temperature na površi provodnika  $\Phi$  6 mm<sup>2</sup>.

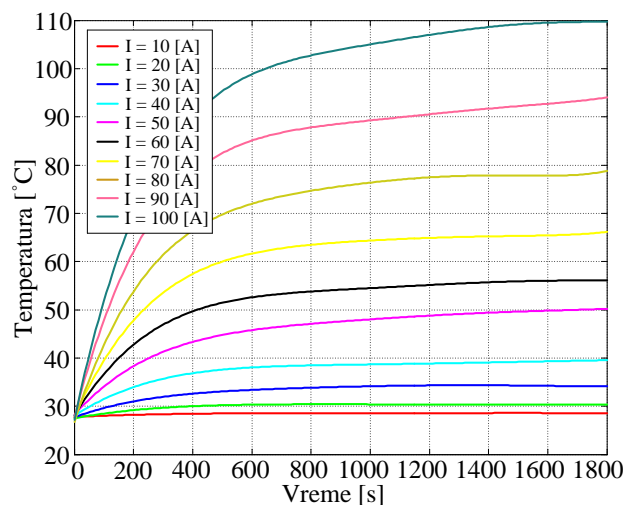
Na Sl. 5 i Sl. 6 se uočavaju odstupanja krivih pri većim jačinama struja, što je posledica variranja jačina struja usled zagrevanja provodnika i nemogućnost kompenzacije tih promena povećanjem napona napajanja provodnika.

Naime, jačina struje u provodniku se reguliše ručno, pomoću potenciometra na uređaju za generisanje struje i to ručno podešavanje nije uvek moglo da u sinhronizmu prati promene temperature i time promene jačine struje.

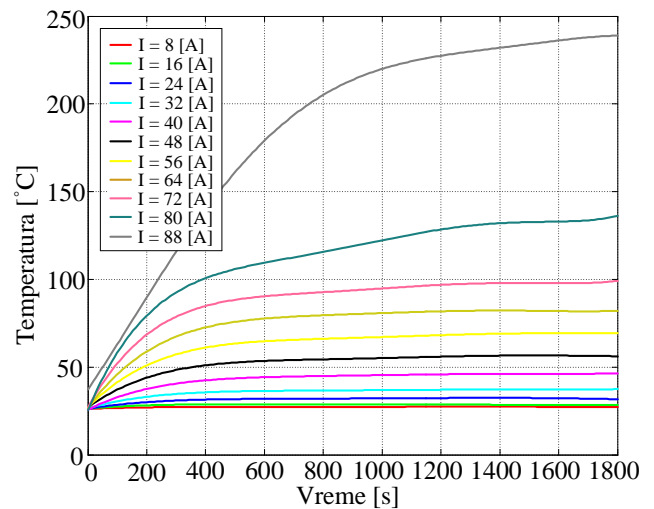
Na Sl. 7 je prikazan vremenski dijagram temperature na površi bakarnog provodnika najveće površine poprečnog preseka,  $\Phi$  10 mm<sup>2</sup>.

U ovom slučaju su sve krive potpuno glatke i skoro sve vreme monotono rastuće, što je posledica boljeg održavanja konstantne jačine struje i pri značajnom porastu temperature provodnika.

Konačno, na kraju, vremenski dijagram temperature za aluminijumski provodnik, prikazan je na Sl. 8.



Slika 7. Vremenski dijagram temperature na površi provodnika  $\Phi$  10 mm<sup>2</sup>.



Slika 8. Vremenski dijagram temperature na površi aluminijumskog provodnika.

Kao što može da se vidi na Sl. 8, i u ovom slučaju je pad jačine struje, prouzrokovan porastom specifične otpornosti provodnika usled porasta temperature, uglavnom uspešno kompenzovan, pravovremenim povećanjem napona napajanja provodnika, pomoću potenciometra na korišćenom generatoru vremenski promenljive, prostoperiodične struje.

## VI. ZAKLJUČAK

Cilj istraživanja opisanog u ovom radu je u potpunosti postignut, time što su prvo određene sve potrebna karakteristike nepoznate temperaturne sonde, a zatim su, pomoću nje, izvršena sva predviđena merenja. Rezultati merenja su morali dodatno da budu obrađeni, primenom metoda i postupaka numeričke analize, što je takođe uspešno urađeno. Dobijeni dijagrami su veoma karakteristični i mogu da posluže kao tipični oblici zagrevanja provodnika sa vremenski promenljivim strujama, pri čemu su uključeni i svi efekti, koji prate takve struje. Rezultati prikazani u ovom radu, mogu da posluže i za verifikaciju rezultata dobijenih proračunima.

U radu na ovoj problematici, uspešno rešavajući sve probleme, koji su iskrsli u toku rada, stečena su dragocena iskustva u preciznim merenjima temperature.

## ZAHVALNICA

Autori se zahvaljuju osoblju Kalibracione laboratorije Fakulteta tehničkih nauka u Novom Sadu, na njihovoj pomoći pri određivanju karakteristika NTC temperaturne sonde.

Autori se zahvaljuju osoblju kompanije „d.o.o. Energobul“ iz Novog Sada, na pomoći prilikom merenja temperature provodnika.

## LITERATURA

- [1] B. Popović, Elektromagnetika, 2. izdanje, Beograd: Građevinska knjiga, 1986, pp. 272-274.
- [2] M. Prša, Osnovi elektrotehnike, Novi Sad, Stylos, 1995, pp. 36-39.

- [3] L. Lindström, "Evaluating impact on ampacity according to IEC-60287 regarding thermally unfavourable placement of power cables," Stockholm, 2011, pp. 23-24. Dostupno na <http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:511556/FULLTEXT01.pdf>.
- [4] L. Kotni, "A proposed algorithm for an overhead transmission line conductor temperature rise calculation", Int. Trans. Electr. Energ. Syst. December 2012; vol. 24, pp. 578-596.
- [5] M. Karahan and Ö. Kalenderli, "Coupled electrical and thermal analysis of power cables using finite element method", Heat transfer-Engineering Applications, prof. V. Vikhrenko (Ed.), 2011, pp. 205-230. Dostupno na <https://www.intechopen.com/books/heat-transfer-engineering-applications/coupled-electrical-and-thermal-analysis-of-power-cables-using-finite-element-method>.
- [6] COMSOL MULTIPHYSICS, CLS 3.5a documentation 2008.
- [7] J. Paulech "Cooling of an electric conductor by free convection – analytical, computational and experimental approaches", 2012, pp. 1-8. Dostupno na <http://www.posterus.sk/?p=13724>.
- [8] O. Chávez and F. Méndez, "The simultaneous influence of the skin effect, environmental conditions and variable resistivity on current and temperature distribution in overhead conductors", Proceedings of the world Congress on Engineering 2010, vol. II, London, 2010, pp. 1-6.
- [9] L. Yannu, L. Yongchun, L. Yanming, S. Wenrong, Y. Peng, L. Junhao, "Coupled electromagnetic – Thermal modeling the temperature distribution of XLPE cable", 2009 Asia-Pacific Power and Energy Engineering Conference, 2009, pp. 1-7.
- [10] L. Yang et al, "Comparison of conductor temperature calculations based on different radial position temperature detections for high-voltage power cable", Energies - Open access journals, 2018, pp. 1-17.

#### ABSTRACT

In a conductor with AC current appear very complex problems, influencing directly on the conductor's temperature. This paper presents the procedure of temperature measurement on the conductor's surface, together with the appropriate numerical treatment of obtained results. The entire process, from the determination of the unknown temperature probe characteristics, to the final results – time diagrams of the temperature, for different RMS current values, is described in this paper. Measurements results of both measurements – temperature probe characteristics and the conductor's surface temperature, required the application of some numerical methods, like the interpolation and fitting of measured data. The procedure was applied on three copper conductors and one aluminum conductor. Final results are shown graphically, in the form of the time - temperature diagrams.

#### **TEMPERATURE ON SURFACE OF CONDUCTOR WITH AC CURRENT**

Karolina Kasaš-Lažetić, Gorana Mijatović, Dejana Herceg, Danka Antić,  
Miroslav Prša