

Proračun induktivnosti većegabaritnih zavojnica sa vazдушnim jezgrom

Saša D. Milić, Slavko Veinović
Elektrotehnički institut Nikola Tesla, Univerzitet u Beogradu
Beograd, Srbija
s-milic@ieent.org, slavko.veinovic@ieent.org

Sažetak—U radu su dati detaljni postupci za izračunavanje i eksperimentalno određivanje parametara indukcionih zavojnica sa vazдушnim jezgrom većih dimenzija. Detaljno je predstavljen matematički proračun magnetne indukcije konkretne zavojnice većih gabarita, koji uzima u obzir veliki poluprečnik i širinu namotaja (poluprečnik je mnogo veći od širine), kao i veliki broj njenih zavojaka, a zatim je prikazano više metodologija za izračunavanje induktivnosti većegabaritnih tzv. kratkih zavojnica. Prikazani su deljni proračuni i rezultati dobijeni merenjem i simulacijom.

Ključne reči—većegabaritna indukciona zavojnica, vazdušno jezgro, induktivnost, vremenska konstanta.

I. UVOD

Induktivnost indukcionih zavojnica sa vazдушnim jezgrom, velikim brojem zavojaka i velikim gabaritima je taško odrediti jer ne postoji egzaktni matematički proračun koji se može univerzalno primeniti na različite konstrukcije ovakvih zavojnica. Ovakve zavojnice se često koriste kao indukcionni senzori za detekciju slabih kvazistacionarnih magnetnih polja.

Merenje induktivnosti zavojnica pomoću naizmeničnih mernih mostova (Maksvel-Vinov, Hejov, Keri-Fosterov, Vagnerov...) takođe može da bude problematično zbog: osetljivosti i nelinearnosti induktivnih i kapacitivnih elemenata mosta, zbog velike induktivnosti i male radne učestanosti (u slučaju konkretne), pri određivanju vremenskih konstanti, zbog zahtevane tačnosti učestanosti naizmeničnog izvora itd.

Ovaj rad ima za cilj da jasnije prikaže inženjerski pristup u određivanju induktivnosti što podrazumeva njeno lako računanje bez potrebe za složenom mernom tehnikom, složenim matematičkim proračunima i računarskim softverima koji zahtevaju složena modelovanja (npr. metod konačnih elemenata).

Problem izračunavanja induktivnosti indukcionne zavojnice velikih dimenzija i velikog broja zavojaka je veoma složen. Ovaj problem je prepoznao još Maksvel davne 1873. godine [1]. Ono što je odavno prepoznato je da induktivnost većegabaritne zavojnice raste sa kvadratom njenog broja zavojaka i sa porastom njenog poluprečnika [2]. U ovom radu je dato nekoliko pristupa koji se mogu nazvati inženjerskim, jer na konkretnom primeru zavojnice pokazuju primenu postojećih metoda, od koji su neke i danas aktuelne jer se na njima baziraju, često korišćeni, *online* kalkulatori i inženjerske praktične formule.

II. PRORAČUN ELEKTROMAGNETNE INDUKCIJE INDUKCIONE ZAVOJNICE

S obzirom na to da se radi o indukcionoj zavojnici, posmatraćemo promenu komponente magnetne indukcije u vremenu (dB/dt) koja se poklapa sa osom senzora. Ako se pretpostavi da je promena magnetske indukcije prostoperiodična pojava i da se dešava po sinusnom zakonu, tada je (1):

$$B = B_m \cdot \sin \omega t \quad (1)$$

$$\frac{dB}{dt} = \omega \cdot B_m \cdot \cos \omega t \quad (2)$$

za $t=0$ s je maksimalni gradijent i on iznosi (3):

$$\frac{dB}{dt} = \omega \cdot B_m = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot B_m \quad (3)$$

U osnovi proračun indukcionne zavojnice se zasniva na primeni Bio-Savarovog zakona (4) [3]:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{I \cdot d\vec{l} \times \vec{r}_0}{r^2} \quad (4)$$

gde su:

- I - struja
- $\frac{d\vec{l}}$ - diferencijal vektora dužine
- \vec{r}_0 - jedinični vektor
- r - rastojanje
- μ_0 - magnetna permeabilnost vakuuma

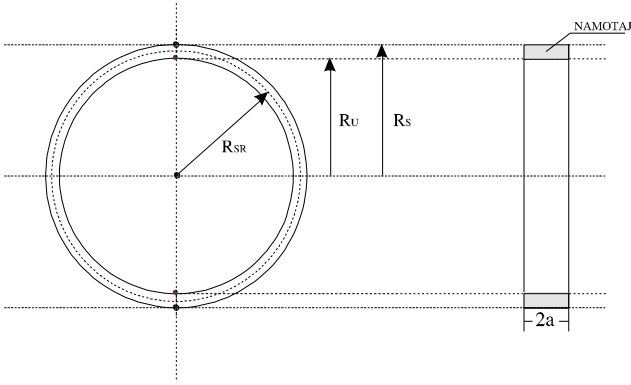
Na Sl.1 je prikazana jedna idukciona zavojnica većih gabarita sa vazдушnim jezgrom. Njene karakteristike su:

- unutrašnji poluprečnik $R_U=0.166$ m
- spoljašnji poluprečnik $R_S=0.182$ m
- srednji poluprečnik $R_{SR}=(R_U+R_S)/2=0.174$ m
- debljina namotaja $2 \cdot a=0.078$ m $\Rightarrow a=0.039$ m
- broj zavojaka $N=80000$ zavojaka

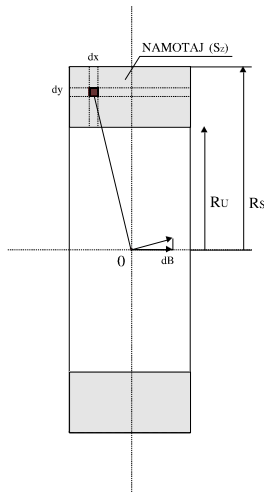
Indukcionne zavojnice većih dimenzija zahtevaju složeniji proračun induktivnosti nego zavojnice manjih dimenzija. Posmatraćemo ovu indukcionu zavojnicu kao šuplji solenoid (bez jezgra) čiji je poprečni presek dat na Sl.2.

Polazna jednačina u detaljnom proračunu indukcionne zavojnice većih gabarita i velikog broja zavojaka (Sl.2) je jednačina elektromagnetne indukcije u osi jednog strujnog zatvorenog kružnog zavojaka (5) [4]:

$$B(x) = \frac{\mu_0 \cdot I}{2} \cdot \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (5)$$



Slika 1. Indukciona zavojnica.



Slika 2. Indukciona zavojnica (poprečni presjek).

A. Proračun elektromagnetne indukcije koji uzima u obzir dimenzije namotaja zavojnice

Ako usvojimo da je \$S_Z\$ površina poprečnog preseka namotaja (sl.2):

$$S_Z = (R_S - R_U) \cdot 2 \cdot a \quad (6)$$

tada je elementarna struja \$dI\$ koja teče kroz elementarnu površinu \$d\sigma = dx \cdot dy\$:

$$dI = \frac{N \cdot I}{S_Z} \cdot dx \cdot dy \quad (7)$$

pa je komponenta magnetske indukcije u glavnoj osi solenoida, koja potiče od elementarne struje \$dI\$, prema već izvedenom obrascu za magnetsku indukciju na sredini ose solenoida [4]:

$$dB = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{2 \cdot S_Z} \cdot \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot d\sigma \quad (8)$$

Kada se izvrši integracija po obe koordinate dobija se izraz za magnetnu indukciju u osi kalema (9):

$$B = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{2 \cdot (R_S - R_U)} \cdot \ln \frac{R_S + \sqrt{a^2 + R_S^2}}{R_U + \sqrt{a^2 + R_U^2}} \quad (9)$$

pa je vrednost magnetne indukcije za dati senzor (posle zamene brojnih vrednosti gde je struja data u amperima):

$$B = 0.2765 \cdot I \text{ [T]} \quad (10)$$

B. Proračun elektromagnetne indukcije preko srednjeg poluprečnika zavojnice

Izraz za magnetsku indukciju senzora (u osi senzora tj. solenoida) se može dobiti i na jednostavniji način ako se kompletan proračun radi preko srednjeg poluprečnika zavojnice \$R_{SR}\$:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot N}{2 \cdot \sqrt{a^2 + R_{SR}^2}} \quad (11)$$

pa je vrednost magnetne indukcije za dati senzor (posle zamene brojnih vrednosti gde je struja data u amperima):

$$B = 0.2819 \cdot I \text{ [T]} \quad (12)$$

III. PRORAČUN PARAMETARA INDUKCIONE ZAVOJNICE

A. Proračun otpornosti zavojnice

Zavojnica se primenjuje u niskofrekventnom području pa je računanje otpornosti prilično jednostavan postupak ukoliko je debljina namotaja mnogo manja od poluprečnika cele zavojnice jer je u tom slučaju moguće u jednačini koristiti srednji poluprečnik zavojnice pri računanju dužine žice namotaja (13):

$$R_Z = \rho_{Cu} \cdot \frac{l}{S_{Cu}} = \rho_{Cu} \cdot \frac{2 \cdot N \cdot R_{SR}}{r_{Cu}^2} = \dots = 187.1 \text{ k}\Omega \quad (13)$$

gde su:

- \$\rho_{Cu}\$ - specifična otpornost bakra (\$1.68 \cdot 10^{-8} \Omega \text{m}\$)
- \$l\$ - dužina bakarnog provodnika (žice)
- \$S_{Cu}\$ - peoprečni presek bakarnog provodnika
- \$r_{Cu}\$ - poluprečnik poprečnog preseka žice

Izmerena vrednost otpornosti zavojnice je \$R_Z = 186 \text{ k}\Omega\$. S obzirom na to da je računaska vrednost dobijena proračunom preko srednjeg zavojka, što unosi izvesnu grešku u proračun dužine provodnika, u radu smo se opredelili za izmerenu vrednost u daljim proračunima.

B. Proračun induktivnosti zavojnice

Cilj nam je da izračunamo induktivnost date zavojnice koju koristimo kao senzor detekcije sporopromenljivog magnetnog polja u opsegu od 0Hz-1Hz i minimalne amplitude magnetne indukcije od \$B = 5 \text{ nT}\$ (vrednost je određena minimalnim magnetnim poljem koje senzor treba da detektuje).

S obzirom na to, kao što je već naglašeno, da se posmatrana zavojnica koristi kao senzor elektromagnetnog polja, korisno je izračunati, tj. proceniti njenu induktivnost \$L_Z [\text{H}]\$. Ono što je opšte poznato je da induktivnost raste sa kvadratom broja zavojaka i sa porastom njenog poluprečnika. U uvodnom delu rada je već pomenuto da je proračun induktivnosti zavojnica velikih gabarita i velikog broja

zavojaka veoma složen posao. Sa ciljem da se ukaže na složenost ovog problema ovde su izložena četiri pristupa i veći broj metodologija u određivanju induktivnosti konkretne zavojnice:

1. Računanje induktivnosti na bazi postojećih složenih formula (Lundin, Grover, Brooks Wheeler...) [2], [5]-[5].
2. On-line računanje induktivnosti na bazi empirijskih obrazaca. Izbor formula i obrazaca je često paradoksalan sa današnjim vremenom. Npr. u [8] je dat on-line kalkulator za proračun induktivnosti na bazi Vilerove formule iz 1928. godine.
3. Računanje induktivnosti na bazi izračunate magnetne indukcije zavojnice, sa naznakom da je izračunata indukcija u osi senzora, a da se onda ona (sa izvesnom greškom u cilju pojednostavljenja proračuna) koristi kao indukcija po celoj površini srednjeg zavojka.
4. Računanje induktivnosti na bazi izmerene vremenske konstante zavojnice.

1) Proračun induktivnosti na bazi Groverove jednačine

Za datu zavojnicu, izračunaćemo induktivnost na bazi Groverove jednačine i interpoliranog koeficijenta [5]:

$$L_Z = 0.1 \cdot R_{SR} \cdot N^2 \cdot k \quad [\mu\text{H}] \quad (14)$$

gde je, iz datih tablica, interpoliran vrednost koeficijenta $k=41.755$, pa se zamenom brojnih vrednosti dobija:

$$L_Z \approx 4650 \text{ H}$$

2) Proračun induktivnosti na bazi Vilerove jednačine:

Za datu zavojnicu, izračunaćemo induktivnost na bazi Vilerove jednačine i interpoliranog koeficijenta [5]:

$$L_Z = \frac{31.6 \cdot R_U^2 \cdot N^2}{6 \cdot R_U + 9 \cdot (2 \cdot a) + 10 \cdot (R_S - R_U)} \quad [\mu\text{H}] \quad (15)$$

pa se zamenom brojnih vrednosti dobija:

$$L_Z \approx 3000 \text{ H}$$

3) Proračun na bazi jednačine za induktivnost diska

Za datu zavojnicu, izračunaćemo induktivnost na bazi jednačine za proračun indukcije diska sa dodatim članom N^2 koji množi dati izraz indukciju diska [2]:

$$L = \frac{\mu_0 \cdot N^2}{4 \cdot \pi} \cdot R_S \cdot P \cdot F \quad (16)$$

gde su $F=1$ i Groverov korekcionni koeficijent $P \approx 27$ [2]. Pa se zamenom brojnih vrednosti dobija:

$$L_Z \approx 3120 \text{ H}$$

4) Proračun induktivnosti na bazi Nagaokine jednačine:

Za datu zavojnicu, izračunaćemo induktivnost na bazi Nagaokine jednačine:

$$L_Z = \pi \cdot \mu_0 \cdot N^2 \cdot \frac{R_{SR}^2}{2 \cdot a} \cdot K \quad (17)$$

i interpoliranog Nagaokinog koeficijenta $K=0.32$. Zamenom brojnih vrednosti se dobija:

$$L_Z \approx 3138 \text{ H}$$

5) On-line proračun [9]:

Za datu zavojnicu, izračunata je induktivnost na pomoću on-line kalkulatora koji proračun vrši na bazi opšte empirijske jednačine [9]:

$$L = N^2 \cdot 2 \cdot R_{SR} \cdot K \quad (18)$$

gde se korekcionni faktor K automatski *online* računa. Dobijena vrednost indukcije je:

$$L_Z \approx 3771 \text{ H}$$

6) On-line proračun na bazi Vilerove jednačine [10]:

Na bazi Vilerove jednačine, sa neznatno drugačijim koeficijentom (konstanta u brojiocu je 31,75 (19) u odnosu na 31,6 koje figurira u (15)), je realizovan *online* kalkulator.

$$L_Z = \frac{31.75 \cdot R_U^2 \cdot N^2}{6 \cdot R_U + 9 \cdot (2 \cdot a) + 10 \cdot (R_S - R_U)} \quad [\mu\text{H}] \quad (19)$$

Unošenjem brojnih vrednosti i aktiviranjem *online* kalkulatora [10] se dobija vrednost induktivnosti za kratku zavojnicu koja ima više slojeva namotaja (što je slučaj zavojnice opisane u ovom radu):

$$L_Z \approx 3201 \text{ H}$$

7) On-line proračun [11]:

Za datu zavojnicu, izračunata je induktivnost na pomoću *online* kalkulatora [11], koji u obzir ne uzima dimenzione karakteristike zavojnice, odnosno koji proračun vrši na bazi trivijalne empirijske jednačine (20):

$$L_Z = \frac{\mu_0 \cdot N^2 \cdot R_{SR}^2 \cdot \pi}{2 \cdot a} \quad (20)$$

pa se zamenom brojnih vrednosti dobija:

$$L_Z \approx 9807 \text{ H}$$

Što u poređenju sa ostalim rezultatima predstavlja nerealno veliku vrednost induktivnosti za datu zavojnicu. Ovaj primer očito pokazuje proizvoljnost u odabiru metodologije za proračun induktivnosti, koja nažalost prisutna i na pojedinim renomiranim sajtovima.

8) Proračun induktivnosti na bazi "detaljno" izračunate magnetne indukcije u osi zavojnice:

Računanje induktivnosti na bazi izračunate magnetne indukcije zavojnice, sa naznakom da je izračunata indukcija u osi senzora, a da se onda ona (sa izvesnom greškom u cilju pojednostavljenja proračuna) koristi kao ista vrednost indukcije po celoj površini izračunatoj prema srednjem zavojku.

Polazeći od relacije za magnetski fluks u solenoidu koji sadrži N zavojaka (21) i izraza za magnetnu indukciju (10):

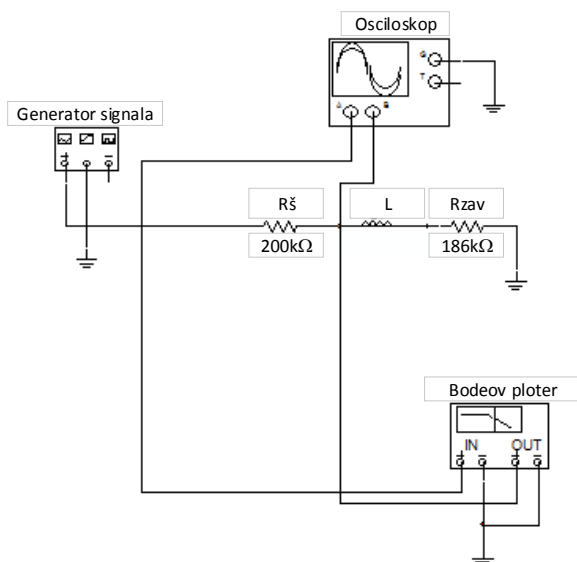
$$\Phi = L \cdot I = N \cdot B \cdot S \quad (21)$$

Zamenom brojnih vrednosti se dobija:

$$L_Z = 2103 \text{ H}$$

9) Proračun induktivnosti na bazi izmerene vremenske konstante zavojnice:

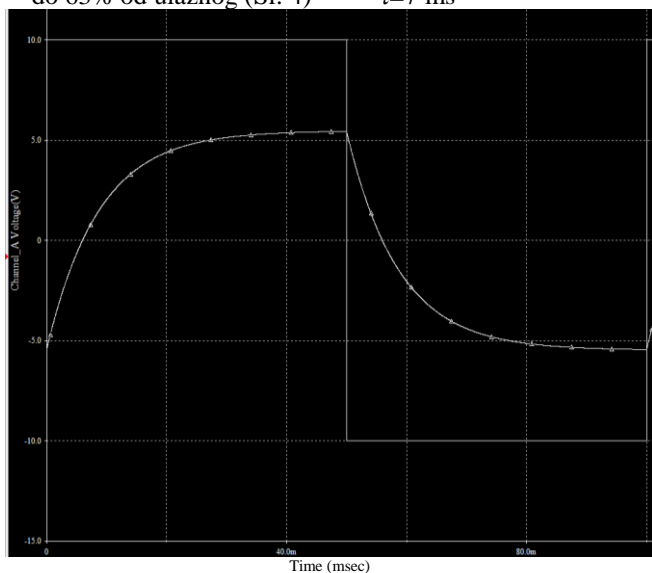
Praktična metodologija određivanja induktivnosti L posmatrane zavojnice se zasniva na određivanju vremenske konstante τ . Vremenska konstanta je dobijena posmatranjem talasnog oblika napona dok je iz generatora funkcija generisan četvrtast napon $U_{PIK}=10 \text{ V}$ i $f=1 \text{ Hz}$ (Sl.3). Korišćena aparatura u toku merenja se sastojala od indukcionne zavojnice, otpornika-šanata i generatora funkcija vezanih u serijsku vezu, a osciloskopom se posmatrao napon iz čijeg talasnog oblika je određena vremenska konstanta τ (Sl. 3 i Sl.4).



Slika 3. Određivanje vremenske konstante zavojnice

Rezultati merenja:

- Otpornost šanta $R_S=200 \text{ k}\Omega$
- Izmerena otpornost zavojnice $R_{ZAV}=186 \text{ k}\Omega$
- Vremenska konstanta određena za vreme porasta napona do 63% od ulaznog (Sl. 4) $\tau=7 \text{ ms}$



Slika 4. Talasni oblici signala

Iz osnovnog obrasca za vremensku konstantu kod induktivnog opterećenja $\tau=L/R$ se dobija izraz za induktivnost:

$$L_M = (R_{ZAV} + R_S) \cdot \tau \quad (22)$$

a, zamenom brojnih vrednosti (uzeta je u obzir izmerena R_{ZAV} , a ne izračunata vrednost otpornosti zavojnice R_{ZAV-R}) se dobija vrednost induktivnosti L_M :

$$L_M \approx 2702 \text{ H}$$

Treba napomenuti da očitavanje vremenske konstante značajno utiče na tačnost proračuna induktivnosti.

IV. ZAKLJUČAK

U radu je prikazan niz postupaka za određivanje induktivnosti indukcionih zavojnica sa velikim brojem

zavojaka i velikim gabaritima, koje se često koriste kao magnetni senzori za detekciju malih i sporopromenljivih (kvazi-stacionarnih) magnetnih polja. Svi ovi postupci i korišćene formule ukazuju na to da je, primenom većeg broja proračuna, postojećih formula i *online* kalkulatora, moguće odrediti samo približno induktivnost gabaritnih senzora sa velikim brojem zavojaka. Značajne razlike u dobijenim vrednostima induktivnosti za istu zavojnicu slikovito ukazuju na ozbiljnost problematike i trasiraju pravac i izazove budućeg istraživanja sa ciljem iznalaženja jednostavnijih inženjerskih proračuna koji bi davali rezultate veće tačnosti.

ZAHVALNICA

Rad je nastao u okviru projekta TR 33024, „Povećanje energetske efikasnosti, pouzdanosti i raspoloživosti elektrana EPS-a utvrđivanjem pogonskih dijagrama generatora i primenom novih metoda ispitivanja i daljinskog nadzora”, koji je finansiralo Ministarstvo prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Republike Srbije.

LITERATURA

- [1] James C. Maxwell, *Electricity and Magnetism*, vols. 1 and 2, reprinted in Dover Publications, 1954.
- [2] M. T. Thompson, "Inductance Calculation Techniques --- Part II: Approximations and Handbook Methods", *Power Control and Intelligent Motion*, Dec. 1999, pages: 1-11.
- [3] *Measurement, Instrumentation and Sensors*, J. G. Webster, Ed. Boca Raton: CRC & IEEE Press, 1999.
- [4] B. Popović, *Osnovi elektrotehnike 2*, Građevinska knjiga, Beograd, 1978, strane: 21, 22.
- [5] F. W. Grover, *Inductance Calculations: Working Formulas and Tables*, Dover Publications, Inc., New York, 1946.
- [6] R. Lundin, "A handbook formula for the inductance of a single-layer circular coil", *Proceedings of the IEEE*, vol. 73, issue 9, 1985., pages: 1428-1429.
- [7] Numerical Methods for Inductance Calculation, dostupno na sajtu: <http://electronbunker.ca/eb/CalcMethods1a.html>
- [8] On-line kalkulator za proračun induktivnosti indukcione zavojnice, dostupno na sajtu: <http://coil32.net/multi-layer-coil.html>
- [9] Formule i on-line kalkulatori za računanje induktansi, dostupno na sajtu: http://www.pulsedpower.eu/toolbox/toolbox_inductances.html#inductances
- [10] Formule i on-line kalkulatori za računanje induktansi, dostupno na sajtu: <http://www.66pacific.com/calculators/coil-inductance-calculator.aspx>
- [11] Formule i on-line kalkulatori za računanje induktansi, dostupno na sajtu: <https://www.omnicalculator.com/physics/solenoid-inductance>

ABSTRACT

In this paper, detailed procedures for calculating and experimentally determining the air core inductors with large dimensions are given. Mathematical calculations are presented in detail, taking into account the large dimensions and a large number of windings. Detailed calculations of short coils and results obtained by measurement and simulation are presented.

CALCULATION OF THE INDUCTANCE OF AIR CORE INDUCTORS WITH LARGE DIMENSIONS

Saša D. Milić, Slavko Veinović