

# Sliding mode kontrola switched-capacitor konvertora

Tijana Stojković  
Elektrotehnički fakultet  
Univerzitet u Beogradu  
Beograd, Srbija  
tijanastojkovic5@gmail.com

Aleksandra Lekić  
Elektrotehnički fakultet  
Univerzitet u Beogradu  
Beograd, Srbija  
lekcik.aleksandra@etf.bg.ac.rs

Vladimir Rajović  
Elektrotehnički fakultet  
Univerzitet u Beogradu  
Beograd, Srbija  
rajo@etf.bg.ac.rs

**Sažetak**—U ovom radu se ispituje primena nelinearne *sliding mode* kontrole na *switched-capacitor* konvertore. U praktičnoj primeni se za kontrolu *switched-capacitor* konvertora koriste PWM naponska ili strujna kontola. Kako ovi linearni metodi imaju ograničen opseg primene, opravdano je istražiti nelinearne metode upravljanja. Ekvivalentna *sliding mode* kontrola u ustaljenom stanju daje prekidački sistem konstantne periode prekidanja i ispunjenosti impulsa PWM signala, a samim tim i stabilan sistem koji radi u okolini ekvilibrijuma. U radu je analizirana kontrola za prekidačke površine prvog i drugog reda datog *switched-capacitor* konvertora. Za različite prekidačke površine je određen ekvilibrijum, kao i opseg parametara za koje je moguće projektovati kontrolu. Kako bi se potkrepila teoretska izvođenja, za određeni skup parametara prikazani su rezultati dobijeni simulacijom.

**Ključne reči**—*Switched-capacitor* konvertor, *sliding mode*, prekidačka površina, stabilnost.

## I. UVOD

*Switched-capacitor* DC-DC konvertori (SC konvertori) se realizuju korišćenjem prekidača i kondenzatora, pri čemu su kalemovi potpuno izostavljeni. Prednost upotrebe SC konvertora je mala težina, male dimenzije i velika gustina snage. Pored toga, izostavljene su magnetske komponente, čime su smanjene dimenzije na čipu SC konvertora, i ima manje gubitaka koje unose magnetske komponente u integrisanoj tehnologiji [1], [2]. SC konvertorima se pored toga i jednostavno upravlja. Ove karakteristike čine ih odličnim napajanjem za mobilne elektronske sisteme poput "cell phone"-a ili ličnih digitalnih asistenata. Zapravo, elektronska industrija već koristi ove konvertore u različitim proizvodima, a otpočela je i njihova masovna primena u integrisanoj tehnologiji za komercijalnu upotrebu. Međutim, većina postojećih SC konvertora nije sposobna da odgovori industrijskim zahtevima regulacije u prisustvu širokog opsega ulaznih napona i varijacija opterećenja [3].

Do sada se većina istraživačkih radova bavila analizom kola SC konvertora [1], [2]. Projektovanju kontrole SC konvertora, kao ograničavajućem faktoru za njegovu upotrebu, nije posvećena pažnja koju zaslužuje. U industriji se trenutno koristi konvencijalna PWM naponska ili strujna kontrola za njihovo upravljanje [4]. Jasno je da ovi linearni načini upravljanja ograničavaju njihovu upotrebu. Za širi opseg uslova rada, SC konvertor ne daje zadovoljavajući odziv. Još gore, postoji mogućnost da SC konvertor postane nestabilan [5]. Iz tih razloga, kako bi primena SC konvertora u elektronskim sistemima bila

moguća za širok opseg radnih uslova i kako bi dinamički odziv bio brz, neophodno je primeniti nelinearne metode upravljanja.

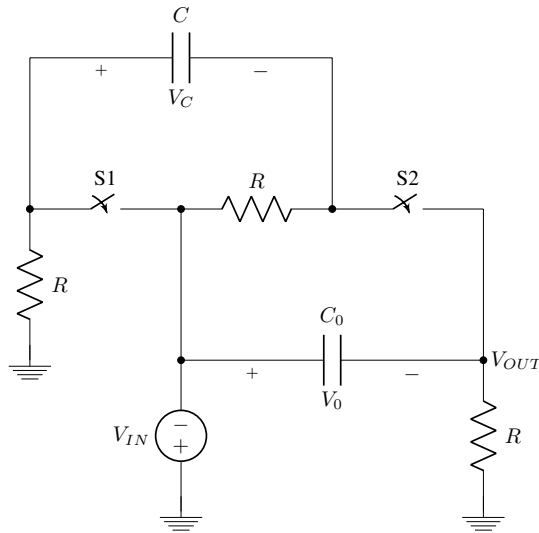
Među mnogim nelinearnim načinima upravljanja, *sliding mode* kontrola [6], [7] pokazala se kao najpogodnija za primenu kod prekidačkih konvertora u poređenju sa ostalim metodama, zbog relativno jednostavne implementacije, odlične robusnosti i karakteristika stabilnosti, kao i sposobnosti da da dinamički odziv konzistentan sa željenim odzivom. Iako je poznata po svim tim karakteristikama, *sliding mode* se retko koristi kod prekidačkih konvertora [8]. To je u najvećoj meri zbog nedovoljnog razumevanja dizajna prekidačkih konvertora od strane inženjera, kao i zbog nedostatka sistematske procedure u postojećoj literaturi.

U ovom radu je predložena ekvivalentna *sliding mode* kontrola za SC konvertor [6]. Prekidački sistem ima u ustaljenom stanju konstantnu periodu prekidanja i faktor ispunjenosti impulsa PWM signala. Kako se SC konvertor, kao i svi prekidački konvertori, može predstaviti pomoću više linearnih podsistema između kojih preključuje, ukupan sistem postaje nelinearan. Zato se kontrola SC konvertora može projektovati zapisom sistema običnih diferencijalnih jednačina kao zbira linearnog dela i nelinearnog ostatka. Stabilnost ovako dobijenog sistema se najbolje proverava primenom linearnih matricnih nejednačina (LMI - *Linear Matrix Inequalities*) i S procedurom [9]. LMI procedura [10], [11] je korišćena za procenu ograničenja u sektoru nelinearnog ostatka. Predloženi način kontrole može da se primeni i na druge tipove SC konvertora.

Rad je organizovan na sledeći način. U drugom poglavlju je opisana *sliding mode* kontrola SC konvertora. U trećem poglavlju su analizirane sve prekidačke površine datog konvertora sa aspekta realizacije i stabilnosti. Četvrto poglavlje predstavlja zaključak.

## II. EKVIVALENTNA SLIDING MODE KONTROLA

SC konvertor prikazan na Sl. 1 se kao i ostali DC-DC konvertori može predstaviti kao dinamički sistem modelom u prostoru stanja [6], [12]. SC konvertor sa Sl. 1 ima dva stanja rada u zavisnosti od prekidača S1 i S2, gde je  $state(S1) = -state(S2)$ . Prvo stanje predstavlja zatvoren prekidač S1 (S2 otvoren), a drugo stanje kada je zatvoren prekidač S2 (S1 otvoren). Promenljive stanja su naponi na kondenzatorima  $C$  i  $C_0$ , pa za slučaj kada je S1 zatvoren, a S2 otvoren, važe jednačine:



Slika 1. SC konvertor.

$$\begin{aligned} \frac{dV_C}{dt} &= -\frac{V_C}{RC}, \\ \frac{dV_0}{dt} &= \frac{V_C}{RC_0} - \frac{V_{IN}}{RC_0}, \end{aligned} \quad (1)$$

što je u matičnom obliku

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{RC_0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{V_{IN}}{RC_0} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Drugi režim rada SC konvertora je za otvoren prekidač S1, odnosno zatvoren S2, kada važi sistem običnih diferencijalnih jednačina

$$\begin{aligned} \frac{dV_C}{dt} &= -\frac{V_C}{RC} + \frac{V_0}{RC} + \frac{V_{IN}}{RC}, \\ \frac{dV_0}{dt} &= \frac{V_C}{RC_0} - \frac{3V_0}{RC_0} - \frac{2V_{IN}}{RC_0} \end{aligned} \quad (3)$$

i u matičnom obliku

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{RC_0} & -\frac{3}{RC_0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} \frac{V_{IN}}{RC} \\ -\frac{2V_{IN}}{RC_0} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Radi pojednostavljenja sintakse uvešćemo smenu  $V_C = x_1$  i  $V_0 = x_2$ , pa vektor promenljivih stanja postaje  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]^T$ . U matičnom obliku se jednačine (1) i (3) mogu zapisati kao  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_i \mathbf{x} + \mathbf{B}_i$ ,  $i = 1, 2$ , sa matricama datim u jednačinama (2) i (4).

Ekvivalentna *sliding mode* kontrola dinamičkog prekidačkog sistema, kakav je dati SC konvertor, se može napisati kao [6]:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} + (\mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{D}) u \quad (5)$$

gde je  $u \in \{0, 1\}$  skalar čija je vrednost 1 kada je prekidač S1 uključen, a prekidač S2 isključen, a 0 kada je prekidač S1 isključen, a S2 uključen. Matrice  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  i  $\mathbf{D}$  su dobijene od

modela u prostoru stanja konvertora na osnovu jednačina (2) i (4):

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}_2, & \mathbf{B} &= \mathbf{B}_2, \\ \mathbf{C} &= \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2, & \mathbf{D} &= \mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2. \end{aligned} \quad (6)$$

U slučaju SC konvertora sa Sl. 1 važi:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{RC_0} & -\frac{3}{RC_0} \end{bmatrix}, & \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} \frac{V_{IN}}{RC} \\ -\frac{2V_{IN}}{RC_0} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{RC} \\ -\frac{1}{RC_0} & \frac{2}{RC_0} \end{bmatrix}, & \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} -\frac{V_{IN}}{RC} \\ \frac{V_{IN}}{RC_0} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (7)$$

Prekidačka površina po kojoj se projektuje regulacija konvertora data je sa

$$S(\mathbf{x}) = \mathbf{M}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}), \quad (8)$$

sa koeficijentima u vidu vektora  $\mathbf{M} = [m_1 \ m_2 \ \dots \ m_n]$ , gde  $n$  predstavlja broj promenljivih stanja. Vektor  $\bar{\mathbf{x}}$  je ekvilibrijum (vrednost promenljivih stanja u ustaljenom stanju). U konkretnom slučaju konvertora sa Sl. 1 broj kondenzatora je dva, pa je  $\mathbf{M} = [m_1 \ m_2]$ .

Uvođenjem prekidačke površine se stabilise sistem ako je površina atraktivna. Uslov koji se može posmatrati da bi površina bila atraktivna je  $S(\mathbf{x}) \dot{S}(\mathbf{x}) < 0$  [13], [14]. Preključivanje između sistema može definisati na sledeći način

$$u = \begin{cases} 1 & \text{ako je } 0 \text{ za } S(\mathbf{x}) > -\Delta, \\ 0 & \text{ako je } 1 \text{ za } S(\mathbf{x}) < \Delta, \end{cases} \quad (9)$$

pri čemu je  $\Delta > 0$  prag histerezisa. Ovako se dobija prekidanje oko prekidačke površine definisano pragom histerezisa.

*Sliding mode* kontrola primenjena na SC konvertor daje na prekidačkoj površini  $S(\mathbf{x}) = 0$  [6]. Kretanje sistema sa primenjenom kontrolom ograničeno je na prekidačku površinu  $S(\mathbf{x}) = 0$  ako je površina atraktivna (privlačna). Površina je privlačna ako svi sopstveni vektori sistema pokazuju ka datoj prekidačkoj površini.

U ustaljenom stanju važi  $S(\mathbf{x}) = 0$ , pa se ekvivalentna kontrola može projektovati prema jednačini

$$u_{eq} = - \left( \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{D}) \right)^{-1} \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B}) \quad (10)$$

ako  $\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{D})$  nije singularna matrica. Nakon zamene parametra  $u$  sa  $u_{eq}$  u jednačinu (5) dobija se sistem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} + (\mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{D}) u_{eq} \quad (11)$$

Vrednost promenljivih stanja u ustaljenom stanju  $\bar{\mathbf{x}}$  dobija se izjednačavanjem jednačine (11) sa nulom. Potom se sistem (5) sa primenjenom ekvivalentnom kontrolom može predstaviti kao zbir linearnog dela datog sa  $\mathbf{A}_1(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})$  za koji se matrica  $\mathbf{A}_1$  dobija kao Jakobijan sistema (11) u okolini ekvilibrijuma i nelinearnog ostatka

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}} - \mathbf{A}_1(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \quad (12)$$

Prekidačka površina  $S(\mathbf{x}) = 0$  omogućava eliminaciju jedne prekidačke promenljive zato što predstavlja linearnu kombinaciju ostalih promenljivih stanja. Neka je  $\mathbf{y} = (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})$  i vektor  $\mathbf{z}$  se dobija kao vektor promenljivih koje nisu eliminisane korišćenjem uslova rada konvertora na prekidačkoj površini [15]. Za tako redukovani sistem je dobijena matrica stanja označena kao  $\mathbf{A}^*$ , a nelinearni ostatak  $\mathbf{h}^*$ .

Stabilnost sistema na željenoj prekidačkoj površini dobija se nalaženjem funkcije Ljapunova kvadratnog oblika

$$V(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^T \mathbf{P} \mathbf{z} \quad (13)$$

gde je  $\mathbf{P} \succ 0$  pozitivno definitna matrica. Sledeći korak je nalaženje izvoda funkcije Ljapunova kao

$$\dot{V}(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^T (\mathbf{A}^{*T} \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}^*) \mathbf{z} + 2\mathbf{z}^T \mathbf{P} \mathbf{h}^*(\mathbf{z}). \quad (14)$$

Ukoliko postoji matrica  $\mathbf{P} \succ 0$  tako da se dobija  $\mathbf{Q} = -(\mathbf{A}^{*T} \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}^*) \succ 0$ , onda je linearizovani sistem stabilan. Kako bi ceo sistem bio stabilan, potrebno je da se njegov nelinearni ostatak  $\mathbf{h}(\mathbf{z})$  nađe unutar sektora  $\alpha$ . Linearne matricne nejednačine [10] su efikasan način za računanje funkcije Ljapunova čiji je sistem predstavljen kao zbir linearnog i nelinearnog dela. LMI problem se formuliše primenom S-procedure [9] koja maksimizira ograničenje sektora nelinearnog dela. Ovaj pristup se bazira na konveksnom programiranju koje daje rešenje problema ako ga ima (ako je problem *feasible*). Konvergencija u slučaju postojanja rešenja je veoma brza. LMI problem koji se rešava za procenu stabilnosti sistema je [11]:

$$\begin{aligned} & \text{minimize } \gamma \\ & \text{subject to } \mathbf{Y} \succ 0 \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{A}^* \mathbf{Y} + \mathbf{Y} \mathbf{A}^{*T} & \mathbf{I} & \mathbf{Y} \mathbf{H}^T \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{H} \mathbf{Y} & \mathbf{0} & -\gamma \mathbf{Y} \end{bmatrix} \prec 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Rešenje daje matricu  $\mathbf{Y} = \tau \mathbf{P}^{-1}$ , za  $\tau > 0$ , koja maksimizira ograničenje sektora

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}. \quad (16)$$

Dobijena vrednost ograničenja u sektoru  $\alpha$  predstavlja granicu nelinearnog ostatka  $\mathbf{h}^*$  datu sa

$$\mathbf{h}^{*T}(\mathbf{z}) \mathbf{h}^*(\mathbf{z}) \leq \alpha^2 \mathbf{H}^T \mathbf{H},$$

za proizvoljnu matricu  $\mathbf{H}$  za koju se dobija da je sistem stabilan.

#### A. Ekvilibrjum sliding mode kontrolisanog SC konvertora

Ekvivalentna *sliding mode* kontrola u ustaljenom stanju daje prekidački sistem čija je perioda prekidanja  $T_S$  približno konstantna, što važi i za ispunjenost impulsa  $u_{eq}$  kojim se upravlja prekidačima S1 i S2. Ispunjenost impulsa prekidačkog signala na izlazu histerezisnog regulatora se još naziva i *duty-ratio*. U ustaljenom stanju se može primeniti *Ampere-second*

*balance* [4]. Naime, u toku jedne periode prekidanja su srednje vrednosti struje kondenzatora jednake nuli. Zato važi:

$$\begin{aligned} -\frac{\bar{V}_C}{C R} u_{eq} T_S + (1 - u_{eq}) T_S \left( -\frac{\bar{V}_C + \bar{V}_0 + V_{IN}}{C R} \right) &= 0, \\ u_{eq} T_S \left( -\frac{\bar{V}_0 + V_{IN}}{R C_0} \right) + (1 - u_{eq}) T_S \frac{\bar{V}_C - 3\bar{V}_0 - 2V_{IN}}{R C_0} &= 0, \end{aligned}$$

što daje

$$\begin{aligned} \bar{V}_C = \bar{x}_1 &= \frac{(1 - u_{eq})^2}{2 - u_{eq}^2} V_{IN}, \\ \bar{V}_0 = \bar{x}_2 &= -\frac{u_{eq}^2 - u_{eq} - 1}{u_{eq}^2 - 2} V_{IN}. \end{aligned} \quad (17)$$

Vrednost *duty-ratio*-a može biti u opsegu  $0 \leq u_{eq} \leq 1$  i na osnovu toga se vidi da je napon  $\bar{V}_C$  u ustaljenom stanju pozitivan. Izraz  $\frac{u_{eq}^2 - u_{eq} - 1}{u_{eq}^2 - 2}$  je pozitivan za  $u_{eq} \in \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)$ , što daje napon  $\bar{V}_0 < 0$ . Isto tako se može pokazati da važi  $\bar{V}_C \in (0, V_{IN})$  i  $\bar{V}_0 \in (-V_{IN}, 0)$ .

#### B. Stabilnost SC konvertora

Kako je SC konvertor prekidački konvertor koji preključuje između dva podsistema, može se analizirati rad konvertora na prekidačkoj površini. Analizom podsistema se dobija uvid o njegovoj stabilnosti, kao i o stabilnosti celokupnog sistema nakon dodavanja histerezisne prekidačke površine.

Podsystem 1j u kome je prekidač S1 uključen, a prekidač S2 isključen, ima ekvilibrjum  $\mathbf{x}_{eq} = [0 \ -V_{IN}]^T$ . Ovaj podsystem je stabilan, što se može videti posmatranjem sopstvenih vrednosti podsistema  $\lambda_1 = -\frac{1}{RC}$  i  $\lambda_2 = -\frac{1}{RC_0}$  koje su negativne [12]. Sopstveni vektori su

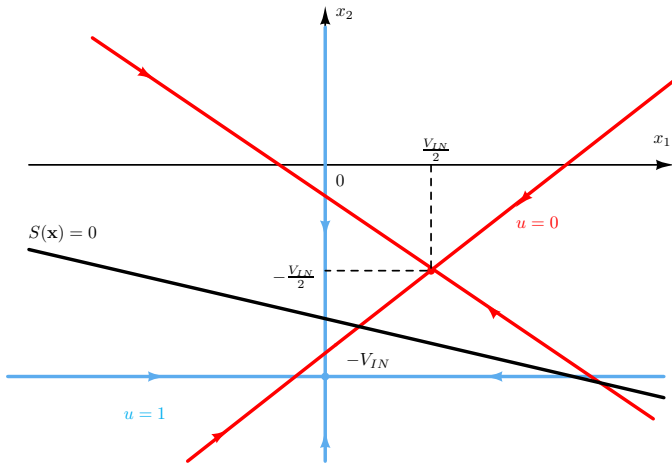
$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Podsystem 2, u kome je prekidač S1 isključen i prekidač S2 uključen, takođe rezultuje stabilnim podsystemom sa ekvilibrjumom  $\mathbf{x}_{eq} = \left[ \frac{V_{IN}}{2} \ -\frac{V_{IN}}{2} \right]^T$ . Sopstvene vrednosti i sopstveni vektori su sada redom

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -\frac{3C + C_0 \pm \sqrt{(3C - C_0)^2 + 4CC_0}}{2CC_0R} < 0, \\ \mathbf{T}_2 &= \begin{bmatrix} 3 - \frac{3C + C_0 - \sqrt{(3C - C_0)^2 + 4CC_0}}{2C} & 1 \\ 3 - \frac{3C + C_0 + \sqrt{(3C - C_0)^2 + 4CC_0}}{2C} & 1 \end{bmatrix}^T. \end{aligned}$$

Na Sl. 2 je prikazan fazni dijagram SC konvertora [12] sa Sl. 1. Kako su u oba podsistema sopstvene vrednosti negativne, očigledno su oba podsistema stabilna i njihovni fazni dijagrami izgledaju kao na Sl. 2. Podsystem 1 ima fazni dijagram predstavljen plavim linijama sa ekvilibrjumom  $\mathbf{x}_{eq} = [0 \ -V_{IN}]^T$ , dok podsystem 2 ima fazni dijagram predstavljen crvenim linijama sa ekvilibrjumom  $\mathbf{x}_{eq} = \left[ \frac{V_{IN}}{2} \ -\frac{V_{IN}}{2} \right]^T$ . Na Sl. 2 su prikazane samo osnovne kombinacije sopstvenih vektora u oba podsistema.

Sa Sl. 2 se vidi da je prekidačku površinu potrebno postaviti tako da se nalazi između dva ekvilibrjuma podsistema 1 i 2 kako bi površina bila atraktivna. Naime, kada je prekidač S1 uključen, a S2 isključen, odnosno za  $u = 1$ , plave linije



Slika 2. Fazni dijagram SC konvertora.

se približavaju površini sa gornje strane. Kada je  $u = 0$ , odnosno kada je S1 isključen i S2 uključen, sistem se približava površini sa donje strane (crvene linije). Ovo je moguće postići jedino kada je površina takva da se ekvilibrijum celog sistema (ustaljeno stanje) nalazi u opsegu  $\bar{x}_1 \in (0, \frac{V_{IN}}{2})$  i  $\bar{x}_2 \in (-V_{IN}, -\frac{V_{IN}}{2})$ .

### III. ANALIZA PREKIDAČKIH POVRŠINA

U ovom odeljku će biti analizirana *sliding mode* kontrola SC konvertora za prekidačke površine prvog i drugog reda. U primerima je analiziran SC konvertor sa Sl. 1 sa brojnim vrednostima  $V_{IN} = 10$  V,  $R = 0.5$   $\Omega$ ,  $C = C_0 = 100$   $\mu$ F. Signal kojim se kontroliše stanje prekidača je generisan korišćenjem histerezisnog regulatora sa pragom  $\Delta = 25$  mV. Simulacije su rađene korišćenjem programa PLECS.

Prekidačke površine koje se mogu realizovati su:  $S(x) = m_1 x_1 - k$ ,  $S(x) = m_2 x_2 - k$  i  $S(x) = m_1 x_1 + m_2 x_2 - k$ . Prve dve površine predstavljaju kontrolu samo jedne promenljive stanja i stoga su jednostavnije za projektovanje i realizaciju. Površina  $S(x) = m_1 x_1 + m_2 x_2 - m_3$  omogućava kontrolu napona oba kondenzatora.

#### A. Prekidačka površina $S(x) = m_1 x_1 - k$

Za prekidačku površinu  $S(x) = x_1 - k$  dobija se evivalentna kontrola [15]:

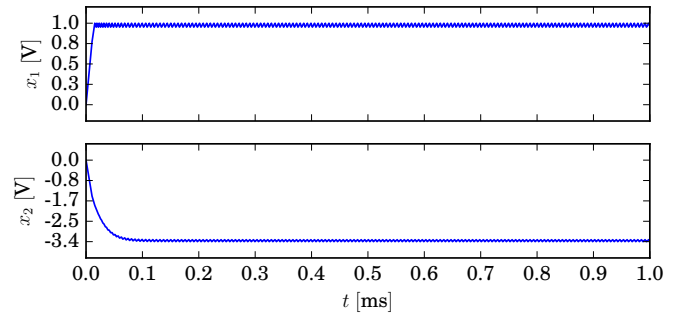
$$u_{eq} = \frac{C_0(-x_1 + x_2) + CV_{IN}}{C_0(x_2 + V_{IN})} \quad (18)$$

koja rezultuje ekvilibrijumom:

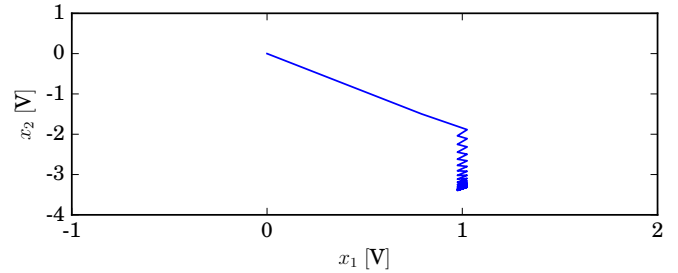
$$\bar{x}_1 = k, \quad \bar{x}_2 = \begin{cases} \frac{-C_0 k + \sqrt{\frac{C_0 k - CV_{IN} + C_0 V_{IN}}{2C_0 k - CV_{IN} + 2C_0 V_{IN}} + CV_{IN} - 2C_0 V_{IN}}}{C_0}, \\ \frac{-C_0 k - \sqrt{\frac{C_0 k - CV_{IN} + C_0 V_{IN}}{2C_0 k - CV_{IN} + 2C_0 V_{IN}} + CV_{IN} - 2C_0 V_{IN}}}{C_0}. \end{cases}$$

Zbog uslova  $\bar{x}_2 > -V_{IN}$  drugo rešenje se odbacuje.

Da bi za ekvivalentnu kontrolu važiolo da je  $0 \leq u_{eq} \leq 1$ , potrebno je da u ustaljenom stanju važi  $\frac{C-C_0}{C_0} V_{IN} \leq \bar{x}_1 \leq$



Slika 3. Vremenski dijagrami promenljivih stanja kada se koristi površina  $S(x) = x_1 - 1$  V.



Slika 4. Fazni dijagram za  $S(x) = x_1 - 1$  V.

$-\frac{V_{IN}}{2} + \frac{C}{C_0} V_{IN}$ . Za date brojne vrednosti ovo je ispunjeno za  $0 \leq \bar{x}_1 \leq \frac{V_{IN}}{2}$ , što se slaže sa zaključcima sa Sl. 2.

Za slučaj od interesa kada je  $k = 1$  V, dobija se  $\bar{x}_1 = 1$  V,  $\bar{x}_2 = (\sqrt{7} - 6)$  V. Ovaj rezultat je potvrđen i u simulaciji kao što se vidi na Sl. 3. Na Sl. 4 je prikazan odgovarajući fazni dijagram u tom slučaju. Vidi se da je konvertor, za koji važi da je u početnom trenutku  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ , po uključenju  $u = 0$  i prati linearnu kombinaciju sopstvenih vektora datih crvenom bojom na Sl. 2. Nakon toga sistem nailazi na prekidačku površinu i nastavlja na njoj da „klizi“.

Primenom LMI procedure (15) može se za date brojne vrednosti odrediti poluprečnik kovergencije nelinearnosti  $\alpha = 1561.3$ . Dato ograničenje sektora se može koristiti za procenu maksimalnog odstupanja od željenih dijagrama u ustaljenom stanju.

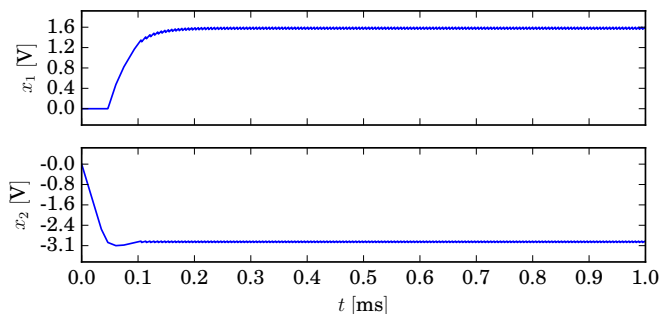
#### B. Prekidačka površina $S(x) = x_2 - k$

Prekidačka površina  $S(x) = x_2 - k$  daje ekvilibrijum

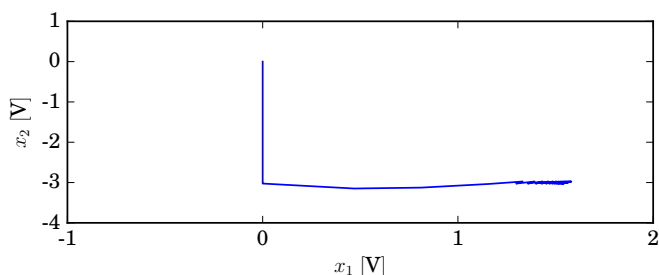
$$\bar{x}_1 = \begin{cases} \frac{V_{IN}}{2} + k - \sqrt{\frac{5}{4}V_{IN}^2 + 3V_{IN}k + 2k^2}, \\ \frac{V_{IN}}{2} + k + \sqrt{\frac{5}{4}V_{IN}^2 + 3V_{IN}k + 2k^2}, \end{cases} \quad (19)$$

$$\bar{x}_2 = k.$$

Prvo rešenje ne zadovoljava uslov da je  $\bar{x}_1 > 0$ . Drugo rešenje će biti ispravno pod uslovom da je  $k \in [-V_{IN}, (-2 + \sqrt{3})V_{IN}]$ . Kako treba da važi i da je  $u_{eq} \in [0, 1]$ , dobija se da će kontrola davati stabilan odziv kada  $k \in [-V_{IN}, -\frac{V_{IN}}{2}]$ . Dobijeni rezultat potvrđuje analizu dobijenu grafički na osnovu faznog dijagrama sa Sl. 2.



Slika 5. Vremenski dijagrami promenljivih stanja kada se koristi površina  $S(\mathbf{x}) = x_2 + 3$  V.



Slika 6. Fazni dijagram za  $S(\mathbf{x}) = x_2 + 3$  V.

Za izabrano  $k = -3$  V dobija se  $\bar{x}_1 = 1.5616$  V,  $\bar{x}_2 = -3$  V. Ovaj rezultat je potvrđen i u simulaciji prikazanoj na Sl. 5. Na Sl. 6 je prikazan odgovarajući fazni dijagram na kome se vidi da po uključenju sistema važi  $u = 1$  i da sistem prati trajektorije vektora  $\mathbf{v} = [0 \ 1]$  date plavim linijama sa Sl. 2 dok ne dođe na prekidačku površinu.

#### C. Prekidačka površina $S(x) = m_1 x_1 + m_2 x_2 - k$

Prekidačka površina  $S(x) = m_1 x_1 + m_2 x_2 - k$  omogućava kontrolu napona na oba kondenzatora sa

$$u_{eq} = \frac{C V_{IN} (m_1 - 2m_2) + C m_2 (x_1 - 3x_2) + C_0 m_1 (x_2 - x_1)}{C_0 m_1 (V_{IN} + x_2) + C m_2 (-V_{IN} + x_1 - 2x_2)},$$

koja daje kao uslov  $0 \leq u_{eq} \leq 1$ , na osnovu koga važi

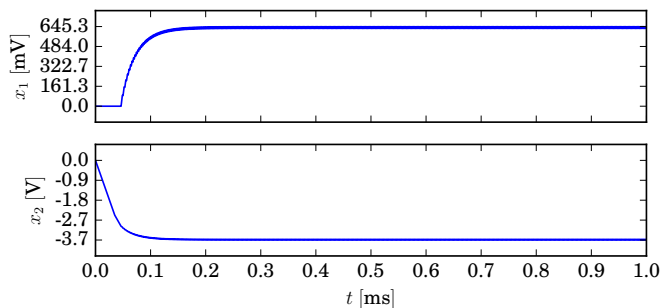
$$C_0 m_1 x_1 + C m_2 x_2 \geq V_{IN} ((C - C_0) m_1 - C m_2),$$

$$\begin{aligned} x_1 (C m_2 - C_0 m_1) + x_2 (-3C m_2 + C_0 m_1) \\ \geq -C V_{IN} (m_1 - 2m_2). \end{aligned}$$

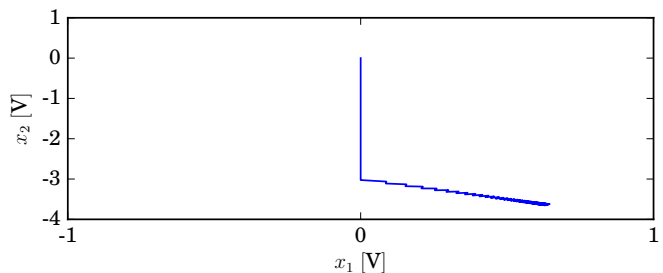
(20)

Data ekvivalentna kontrola daje dva moguća rešenja za ustaljeno stanje, od kojih se bira jedno sa odgovarajućim vrednostima za  $\bar{x}_1 > 0$  i  $\bar{x}_2 < 0$ . Ove vrednosti nisu date u radu jer su u vidu veoma dugačkih izraza.

Kako je za simulirani slučaj  $C = C_0$ , gornji izrazi (20) postaju  $m_1 x_1 + m_2 x_2 \geq m_2 V_{IN}$  i  $x_1 (m_2 - m_1) + x_2 (-3m_2 + m_1) \geq -V_{IN} (m_1 - 2m_2)$ , što se opet slaže sa Sl. 2. Za izabrano  $m_1 = 1$ ,  $m_2 = 1$  i  $k = -3$  V dobijamo da je  $\bar{x}_1 = 637.5$  mV,  $\bar{x}_2 = -3.6374$  V. Ovaj rezultat je potvrđen i u simulaciji prikazanoj na Sl. 7. Sa Sl. 8 se vidi da se sistem ponaša slično kao u prethodnom slučaju, Sl. 6.



Slika 7. Vremenski dijagrami promenljivih stanja kada se koristi površina  $S(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + 3$  V.



Slika 8. Fazni dijagram za  $S(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + 3$  V.

Prednost korišćenja prekidačke površine sa dve promenljive stanja jeste što je moguće ograničiti vrednosti napona na oba kondenzatora. Time se postiže da nijedan od napona na kondenzatorima ne pređe neku vrednost, pa samim tim ne može da bude kritičan u pogledu oštećenja kola usled prevelikih vrednosti napona. Sa druge strane, sa Sl. 3 i Sl. 5 se vidi da se prilikom korišćenja jedne površine postiže brži ulazak u ustaljeno stanje.

Još jedan rezultat jeste to što vrednosti napona na kondenzatorima ne zavise od otpornosti  $R$ , pa se željeni naponi mogu podešavati izborom vrednosti koeficijenta  $m_1$ ,  $m_2$  i  $k$ .

#### IV. ZAKLJUČAK

U ovom radu je opisano projektovanje *sliding mode* kontrole jednog SC konvertora. Cilj rada je ispitivanje nelinearnog metoda upravljanja SC konvertorima kako bi se proširio opseg njihove upotrebe i poboljšale dinamičke karakteristike. Kao najpogodnija nelinearna metoda upravljanja za primenu izabrana je *sliding mode* kontrola. Za analizirani SC konvertor određen je model u prostoru stanja, a potom je projektovana njegova ekvivalentna *sliding mode* kontrola. Određen je opseg vrednosti koje može uzimati ekvilibrijum i kako je potrebno izabrati prekidačku površinu tako da se dobije stabilan sistem. Stabilnost je dokazana i korišćenjem LMI procedure. Dodatna analiza stabilnosti je izvršena uz pomoć faznog dijagrama, na osnovu kog se vidi kako treba postaviti prekidačku površinu da bi dobijen sistem bio stabilan. Na kraju su analizirane prekidačke površine prvog i drugog reda SC konvertora i poređeni njihovi rezultati. Neki od dobijenih rezultata potvrđeni

su i simulacijama. *Sliding mode* kontrolu moguće je primeniti i na neki drugi tip SC konvertora, pa se sistematizacijom rezultata može doći do zaključaka koji bi proširili njihovu dalju upotrebu.

#### ZAHVALNICA

Ovaj rad je rađen u okviru projekata Ministarstva za nauku pod brojevima TR33020 i TR32039.

#### LITERATURA

- [1] M. S. Makowski and D. Maksimovic, "Performance limits of switched-capacitor dc-dc converters," in *Power Electronics Specialists Conference, 1995. PESC'95 Record., 26th Annual IEEE*, vol. 2. IEEE, 1995, pp. 1215–1221.
- [2] M. D. Seeman and S. R. Sanders, "Analysis and optimization of switched-capacitor dc-dc converters," *IEEE transactions on power electronics*, vol. 23, no. 2, pp. 841–851, 2008.
- [3] S.-C. Tan, S. Bronstein, M. Nur, Y.-M. Lai, A. Ioinovici, and K. T. Chi, "Variable structure modeling and design of switched-capacitor converters," *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, vol. 56, no. 9, pp. 2132–2142, 2009.
- [4] R. W. Erickson and D. Maksimovic, *Fundamentals of power electronics*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [5] S.-C. Tan, S. Bronstein, A. Ioinovici, K. T. Chi *et al.*, "Nonlinear control of switched-capacitor converter using sliding mode control approach," in *2008 IEEE Power Electronics Specialists Conference*. IEEE, 2008, pp. 372–377.
- [6] V. Utkin, "Sliding mode control of dc/dc converters," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 350, no. 8, pp. 2146–2165, 2013.
- [7] S.-C. Tan, Y.-M. Lai, and K. T. Chi, "General design issues of sliding-mode controllers in dc-dc converters," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 55, no. 3, pp. 1160–1174, 2008.
- [8] S.-C. Tan, Y.-M. Lai, M. K. Cheung, and C. Tse, "On the practical design of a sliding mode voltage controlled buck converter," *IEEE Transactions on Power Electronics*, 2005.
- [9] V. A. Yakubovich, "S-procedure in nonlinear control theory," *Vestnik Leningrad University*, vol. 1, pp. 62–77, 1971.
- [10] S. P. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear matrix inequalities in system and control theory*. SIAM, 1994, vol. 15.
- [11] D. Šiljak and D. Stipanovic, "Robust stabilization of nonlinear systems: the lmi approach," *Mathematical problems in Engineering*, vol. 6, no. 5, pp. 461–493, 2000.
- [12] H. K. Khalil and J. Grizzle, *Nonlinear systems*. Prentice hall New Jersey, 1996, vol. 3.
- [13] A. Levant, "Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control," *International journal of control*, vol. 58, no. 6, pp. 1247–1263, 1993.
- [14] A. D. Lekić and D. M. Stipanović, "Lmi approach for sliding mode control and analysis of dc-dc converters," *Tehnika*, vol. 71, no. 5, pp. 715–723, 2016.

#### ABSTRACT

In this paper the use of nonlinear sliding mode control on switched-capacitor converter is being examined. Conventional PWM voltage mode or current mode control are commonly used in practice for controlling switched-capacitor converters. Since this linear controlling methods have limited range of possible applications, it is useful to examine nonlinear controlling methods. Equivalent sliding mode control results with switching system that has constant switching period and PWM duty ratio, thus stable system that operates in near equilibrium. The control is being analyzed for switching surfaces of first and second order for given switched capacitor converter For different switching surfaces the equilibrium is calculated, as well as the range of parameters for witch is possible to project the control. For certain set of parameters the results of simulation are given in order to confirm the theoretical

results. Key words: switched capacitor converter, sliding mode, switching surface, stability.

#### Sliding mode Control of Switched Capacitor Converter Tijana Stojković, Aleksandra Lekić, Vladimir Rajović