

# Analiza prekidnog geometrijskog mjesta korijena u sistemima upravljanja

Tomislav B. Šekara  
Elektrotehnički fakultet  
Univerzitet u Beogradu  
Beograd, Srbija  
[tomi@etf.rs](mailto:tomi@etf.rs)

Milan R. Rapaić  
Mirna Kapetina  
Fakultet tehničkih nauka  
Univerzitet u Novom Sadu  
Novi Sad, Srbija  
[rapaja@uns.ac.rs](mailto:rapaja@uns.ac.rs), [mirna.kapetina@uns.ac.rs](mailto:mirna.kapetina@uns.ac.rs)

Vidan Govedarica  
Elektrotehnički fakultet  
Univerzitet u Istočnom Sarajevu  
Istočno Sarajevo, Bosna i Hercegovina  
[vidangov@yahoo.com](mailto:vidangov@yahoo.com)

**Sažetak**—Geometrijsko mjesto korijena (GMK) su krive u kompleksnoj ravni u zavisnosti od realnog parametra koje predstavljaju položaj korijena karakteristične jednačine sistema. Može se reći da su GMK obično neprekidne (kontinualne) krive, ali postoje slučajevi kada to nisu i biće predmet analize u ovom radu. Takođe će biti definisana pravila za konstrukciju prekidnog GMK i biće pokazana na nekoliko primjera sa graficima.

**Ključne riječi**— Geometrijsko mjesto korijena; Sistemi upravljanja; Karakteristična jednačina sistema;

## I. UVOD

Osnovne postavke metode geometrijskog mjesta korijena je 1948. godine definisao ruski naučnik K. F. Teodorčik [1]. Međutim, metodu su ubrzo razradili američki naučnik Ivens (Evans) [2,3], pa zatim ponovo Teodorčik i Bendrikov [4] i Uderman u Rusiji [5].

Metoda GMK su krive u kompleksnoj  $s$ -ravni u zavisnosti od realnog parametra  $k \in \mathbb{R}$  koje predstavljaju položaj korijena karakteristične jednačine sistema  $1 + kW_n(s) = 0$ . Metoda se zasniva takođe i da uspostavi odnos između polova i nula funkcije povratnog i spregnutog prenosa sistema sa povratnom spregom u kompleksnoj ravni. Metoda GMK u sistemima automatskog upravljanja (SAU) pruža mogućnost podešavanja spektra polova, nula u zavisnosti od realnog parametra (pojačanja) funkcije povratnog prenosa tako da polovi i nule funkcije spregnutog prenosa dobiju željene vrijednosti (položaj u kompleksnoj ravni), odnosno da sistem u zatvorenoj povratnoj sprezi dobije željene performanse/robustnost [6-10].

Metoda GMK je standardno razvijena za klasu realnih racionalnih funkcija povratnog prenosa kompleksnog argumenta, dok je u novije vrijeme metoda GMK uopštena za realnu klasu funkcije povratnog prenosa koje ne moraju biti racionalne (proces sa transportnim kašnjenjem, distribuirani procesi, frakcioni procesi, procesi sa složenom funkcijom povratnog prenosa, itd) [10]. Na ovaj način metoda GMK postaje opšta metoda za analizu i sintezu SAU u kompleksnom domenu bez ograničenja na složenost funkcije povratnog prenosa. Međutim neka standardna pravila za konstrukciju GMK ne važe za određenu klasu realnih racionalnih funkcija povratnog prenosa što je i motivacija za ovaj rad da se takvi

slučajevi posebno analiziraju i pokažu na nekoliko primjera sa graficima. Takve klase funkcija povratnog prenosa u opštem slučaju daju prekidni GMK.

## II. KRATAK PREGLED OSNOVNIH PRAVILA GMK

Konstrukcija GMK primjenom osnovnih pravila uključujući princip modula  $|kW_n(s)|=1$  i princip argumenta  $\arg(kW_n(s)) = \pi(2l+1)$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ , ne zahtijeva izračunavanje korijena karakteristične jednačine sistema  $1 + kW_n(s) = 0$ , za sve vrijednosti realnog parametra  $k$ , [1-10].

**1.** Broj krivih GMK, s obzirom na uslov fizičke ostvarljivosti, jednak je broju polova funkcije povratnog prenosa a koji odgovara cjelobrojnoj vrijednosti stepena karakteristične jednačine sistema.

**2.** Krive GMK koje ne pripadaju realnoj osi kompleksne ravni su u odnosu na nju simetrične za sisteme čija karakteristična jednačina ima realne koeficijente tj. ako je ispunjen uslov  $\overline{W_n(s)} = W_n(\bar{s})$ , gdje nadvučeno predstavlja operaciju konjugacija.

**3.** Za  $k=0$  GMK se nalazi u polovima ili u opštem slučaju u singularnim tačkama funkcije  $W_n(s)$ .

**4.** Za  $k \rightarrow \infty$  GMK se nalazi u nulama funkcije  $W_n(s)$  ili u opštem slučaju u singularnim tačkama funkcije  $1/W_n(s)$ .

**5.** Asimptotske osobine. Grane GMK koje se završavaju u nulama u beskonačnosti teže asimptotski ka njima. Sve asimptote se sijeku u jednoj tački (koja ne mora biti konačna) na realnoj osi (u zvezdištu asimptota) čija je apscisa određena izrazom

$$\sigma_a = -\frac{1}{r} \lim_{z \rightarrow 0} \left( \frac{f'(z)}{f(z)} \right), \quad f(z) = \frac{z^r}{W(1/z)}, \quad r > 0, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Uglovi asimptota se određuju po formuli

$$\phi_{al} = \begin{cases} \frac{(2l+1)\pi}{r}, & k > 0, l \in \{l | -r < 2l+1 \leq r, l \in \mathbb{Z}\} \\ \frac{2l\pi}{r}, & k < 0, l \in \{l | -r < 2l \leq r, l \in \mathbb{Z}\} \end{cases}$$

Parametar  $r$  određuje u opštem slučaju na osnovu principa argumenta po formuli  $r = -\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{W'(s)}{W(s)} ds$ , po konturi  $\Gamma$

koja obuhvata cijelu  $s$ -ravan. Elementarnim transformacijama u većini slučajeva prethodna relacija se može svesti na oblik

$$r = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left( \frac{sW'(s)}{W(s)} \Big|_{s=\rho e^{i\varphi}} \right) d\varphi. \text{ Ako je normalizovana}$$

funkcija povratnog prenosa racionalna  $W_n(s) = B_m(s)/A_n(s)$  iz predhodnih opštih pravila za asimptote slijede standardne

relacije  $\sigma_a = \left( \sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i \right) / (n-m)$ , dok se uglovi asimptota

određuju

$$\phi_{al} = \begin{cases} \frac{(2l+1)\pi}{n-m}, & k > 0, l \in \{l | -(n-m) < 2l+1 \leq n-m, l \in \square\} \\ \frac{2l\pi}{n-m}, & k < 0, l \in \{l | -(n-m) < 2l \leq n-m, l \in \square\} \end{cases},$$

gdje su  $p_j, j = \overline{1, n}$  i  $z_i, i = \overline{1, m}$  korijeni polinoma  $A_n(s)$  i  $B_m(s)$  respektivno. Može se uočiti da ova pravila za asimptote

ne važe kada je  $\sum_{j=1}^n p_j = \sum_{i=1}^m z_i$  i  $r = 0$  ili  $n = m$ . Upravo i za

ovakve slučajeve se javlja prekidni GMK koji će biti analiziran u narednom poglavlju.

**6.** Grane GMK na realnoj osi nalaze se lijevo (desno) od neparnog broja kritičnih tačaka ako je  $\lim_{|s| \rightarrow \infty} (kW_n(s)s^r) > 0$

( $\lim_{|s| \rightarrow \infty} (kW_n(s)s^r) < 0$ ), odnosno dijelovi realne ose koji se nalaze lijevo (desno) od neparnog broja polova i nula su istovremeno i dijelovi GMK.

**7.** Singularna tačka  $s_0$  GMK predstavljaju presjek  $q$  krivih GMK u  $s$ -ravni koja zadovoljava rješenja jednačine  $d^v(1/W_n(s))/ds^v \Big|_{s=s_0} = 0, v = \overline{1, q-1}$ . Specijalno ako je  $q = 2$

i  $s_0 = \sigma_0 \in \square$  presjek GMK pripada realnoj osi  $s$ -ravni (može biti određena i primjenom faznog kriterijuma  $\sum_{i=1}^n 1/(\sigma_0 - p_i) - \sum_{l=1}^m 1/(\sigma_0 - z_l) = 0$ ) tako da se tačka presjeka nalazi između dvije susjedne kritične tačke (pol ili nula), na dijelu realne ose koji pripada GMK.

**8.** Uglovi izlaska (ulaska) GMK iz polova (u nule) određuju se na osnovu faznog kriterijuma, izborom tačke  $s_k$  koja se, po pretpostavci, nalazi na GMK beskonačno blizu posmatranog prostog (jednostrukog) pola  $p_k$  (proste nule  $z_k$ ) na osnovu

$$\text{formule } \beta_k = -\lim_{s \rightarrow p_k} \left( \arg \{W_n'(s)/W_n^2(s)\} \right) \text{ odnosno}$$

$$\alpha_k = \lim_{s \rightarrow z_k} \left( \arg \{W_n'(s)/W_n^2(s)\} \right) \text{ gde su } \beta_k \text{ ( } \alpha_k \text{ )- traženi ugao}$$

izlaska (ulaska) GMK iz posmatranog prostog pola  $p_k$  (proste

nule  $z_k$ ). Napomenimo da neodređenost granične vrijednosti ukazuje na višestrukost pola ili nule.

Za racionalne funkcije povratnog prenosa uključujući i višestrukim pola  $p_k$  višestrukosti  $\eta \in \square$  (nule  $z_k$  višestrukosti  $\mu \in \square$ ) i  $k > 0$ , može da se koristi kriterijum za uglove izlaska (ulaska) GMK iz polova (u nule) na osnovu algebarske sume argumenta vektora povučениh iz svih kritičnih tačaka u posmatranu tačku, uključujući i posmatrani pol po formuli

$$\sum_{i=1}^m \angle z_i s_k - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \angle p_j s_k - \eta \beta_k = \pi(2l+1), l \in \{l | -\eta < 2l+1 \leq \eta, l \in \square\},$$

odnosno za nulu

$$\mu \alpha_k + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m \angle z_i s_k - \sum_{j=1}^n \angle p_j s_k = \pi(2l+1), l \in \{l | -\mu < 2l+1 \leq \mu, l \in \square\} \text{ g}$$

de su  $\beta_k$  ( $\alpha_k$ )- traženi ugao izlaska (ulaska) GMK iz posmatranog pola  $p_k$  višestrukost  $\eta \in \square$  (nule  $z_k$  višestrukosti  $\mu \in \square$ ).

**9.** Određivanje pojačanja duž grana GMK. Pojačanje  $k(s_0)$ , u nekoj tački  $s_0$  koja pripada GMK, određuje se na osnovu principa modula  $k(s_0) = 1/|W(s_0)|$ .

**10.** Divergencija grana GMK. Ako je  $n-m \geq 2$  i neke grane GMK krenu ulevo, druge grane GMK će obavezno krenuti udesno tako da algebarska suma realnih dijelova korijena karakteristične jednačine ostane konstantna.

**11.** Presek GMK s imaginarnom osom kompleksne ravni može da se odredi primjenom nekog od kriterijuma stabilnosti određivanjem vrijednosti kritičnog pojačanja  $k = k_c$  i kritične učestanosti  $\omega = \omega_c$  za koje sistem dolazi na granicu stabilnosti ili na neki drugi način.

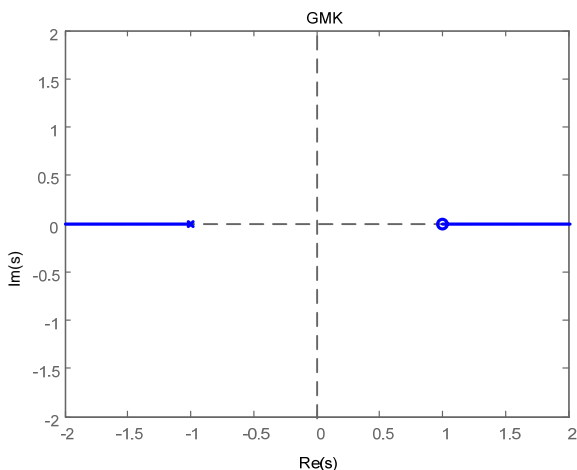
**12.** Konstrukcija konjugovano-kompleksnih grana GMK može se ostvariti na osnovu prethodnog pravila, translirajući imaginarnu osu i određujući preseke GMK s pomerenim imaginarnim osama.

Istaknimo da ova pravila nisu jedina već da postoji niz drugih pravila vezano za analizu GMK koja su u opštem slučaju predmet matematičke analize funkcija kompleksnog argumenta.

### III. PREKIDNO GMK U SISTEMIMA UPRAVLJANJA

Prekidne krive koje čine GMK za konačnu vrijednost realnog parametra  $k \in \square$  (prekidno GMK) su krive u kompleksnoj  $s$ -ravni koje predstavljaju položaj korijena karakteristične jednačine sistema  $1 + kW_n(s) = 0$ . Ovi prekidi GMK za racionalne funkcije povratnog prenosa spadaju u prekide druge vrste, tj. one grane GMK koje odlaze u beskonačnosti a potom se vraćaju u konačne nule, na primjer:

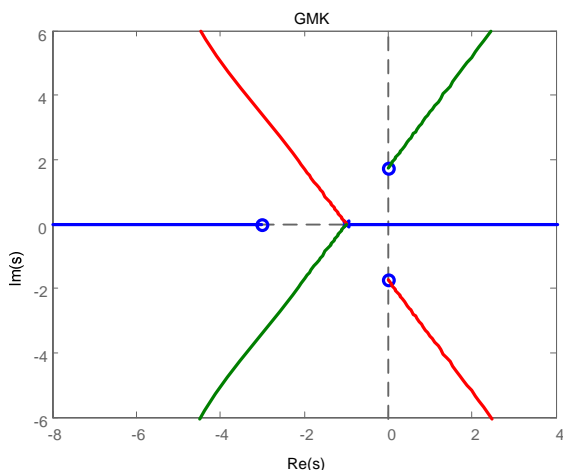
Primjer 1. Geometrijsko mjesto korijena za normalizovanu funkciju povratnog prenosa  $W_n(s) = (1-s)/(s+1)$ , za  $k > 0$  je prikazan na slici 1.



Slika 1. Prekid druge vrste za grane GMK

Na osnovu prethodne slike uočavamo da je došlo do prekida GMK i to druge vrste jer se grana GMK preko beskonačnosti zatvorila u nulu.

Primjer 2. Geometrijsko mjesto korijena za normalizovanu funkciju povratnog prenosa  $W_n(s) = \frac{(s^2+3)(s+3)}{(s+1)^3}$  za  $k < 0$  je prikazan na slici 2.

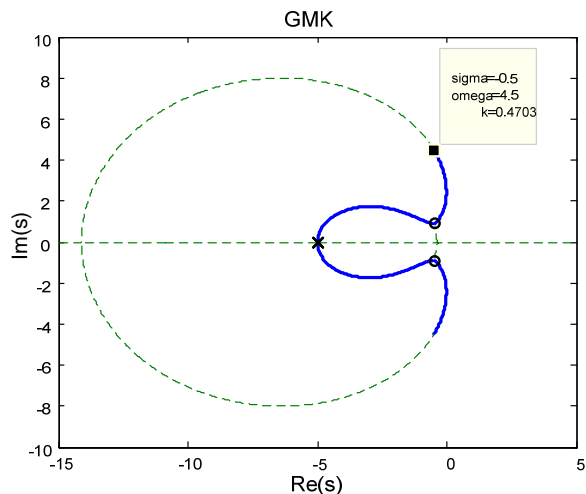


Slika 2. Prekid druge vrste za grane GMK

Takođe i u ovom primjeru sa prethodne slike se uočavaju prekidi druge vrste za grane GMK.

Osim ovih prekida GMK druge vrste postoje prekidi i GMK prve vrste koji se pojavljuju kod funkcija povratnog prenosa koje nisu racionalne. Takvi prekidi se mogu opisati u smislu da kriva GMK za neko konačno  $k$  iz osnovne Rimanove ravni pređe u neku drugu Rimanovu ravan i obrnuto, tj. pojavljuju se ponori i izvori u osnovnoj Rimanovoj ravni za konačno  $k \neq 0$ . Napomenimo da je osnovna Rimanova ravan relevantna za stabilnost sistema upravljanja a time i za analizu i sintezu SAU. Prekid tipa ponora prve vrste je prikazan na slici 3. za primjer 3. Puna plava linija odgovara za  $k > 0$  a zelena crtkana linija za  $k < 0$ .

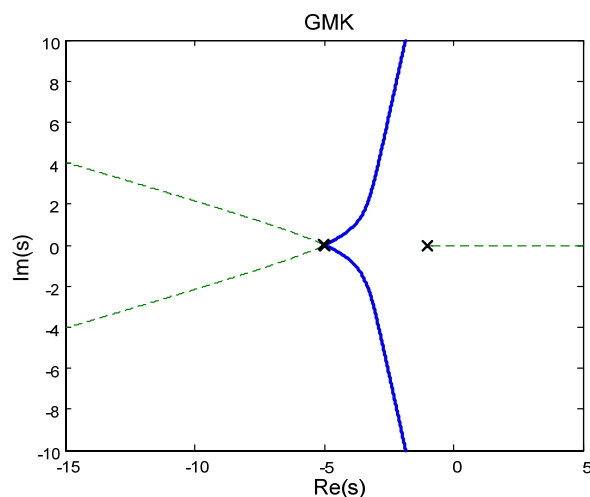
Primjer 3. Geometrijsko mjesto korijena za normalizovanu funkciju povratnog prenosa  $W_n(s) = \frac{(s^2+s+1)^{1.5}}{(s+5)^2}$  za  $k \in \mathbb{R}$  je prikazan na slici 3. na osnovu algoritma opisanog u [10].



Slika 3. Prekid prve vrste tipa ponora za grane GMK, puna plava linija za  $k > 0$  i zelena crtkana linija za  $k < 0$ .

Osim ovih prekida prve i druge vrste imamo i izolovane tačke GMK koje u specijalnom slučaju odgovaraju prekidima prve vrste. Ovo možemo uočiti na slici 4. u primjeru 4. izolovana tačka  $s_1 = -1$ , odgovara kada je  $k > 0$ .

Primjer 4. Geometrijsko mjesto korijena za normalizovanu funkciju povratnog prenosa  $W_n(s) = \frac{1}{(s+1)^{0.75}(s+5)^{1.5}}$  za  $k \in \mathbb{R}$  je prikazan na slici 4. na osnovu algoritma opisanog u [10]. Puna plava linija odgovara za  $k > 0$  a zelena crtkana linija za  $k < 0$ .



Slika 4. Izolovana tačka  $s_1 = -1$ , kad je  $k > 0$  za GMK, puna plava linija za  $k > 0$  i zelena crtkana linija za  $k < 0$ .

Za GMK sa prekidima druge vrste kod kojih je  $r = 0$ , moguće je izvesti odgovarajuće transformacije na osnovu karakteristične jednačine  $1 + kW_n(s) = 0$ , da bi se formirala neka druga funkcija povratnog prenosa  $\hat{k}\hat{W}_n(s)$  a da nema tih prekida u GMK. Ako proširimo osnovnu karakterističnu jednačinu sa parametrom  $c \in \mathbb{R}$  dobija se  $1 + k(W_n(s) - c) + kc = 0$ , odnosno  $1 + \frac{k}{1 + kc}(W_n(s) - c) = 0$ , tako da je  $\hat{k} = \frac{k}{1 + kc}$  i  $\hat{W}(s) = W(s) - c$ . Parametar  $c \in \mathbb{R}$  se određuje na osnovu izraza  $c = \lim_{|s| \rightarrow \infty} W_n(s)$ . Na ovaj način prekidni GMK se preslikava u standardni GMK za koji važe osnovna navedena pravila. Za primjer 1 dobijamo  $c = -1$ ,  $\hat{W}(s) = 2/(s+1)$  i  $\hat{k} = k/(1-k)$ , odakle jasno slijedi prekid  $\hat{k}$  za  $k = 1$ . Slično za primjer 2 imamo  $c = 1$ ,  $\hat{W}(s) = 8/(s+1)^3$  i  $\hat{k} = k/(1+k)$ , odakle jasno slijedi prekid  $\hat{k}$  za  $k = -1$ .

#### ZAKLJUČAK

Može se zaključiti da GMK za slučajeve za koje je  $c = \lim_{|s| \rightarrow \infty} W_n(s) \neq 0$ , treba izvršiti preslikavanje u standardni GMK i za njegovu konstrukciju koristiti osnovna pravila. Za prekidne GMK prve vrste uključujući i izolovane tačke kod kojih kriva GMK za neko konačno  $k$  iz osnovne Rimanove ravni pređe u neku drugu Rimanovu ravan i obrnuto, tj. pojavljuju se ponori i izvori u osnovnoj Rimanovoj ravni nisu za sada nađena preslikavanja na standardni GMK osim u možda u specijalnim slučajevima.

#### ZAHVALNICA

Autori Tomislav Šekara, Milan Rapaić i Mirna Kapetina zahvaljuju se za podršku Ministarstvu prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Republike Srbije, projekti TR33020 (T.B.Š) TR32012, TR33018 (M.R.R) i TR32012 (M.K). M.R.R. i M.K. se takođe zahvaljuju Vladi AP Vojvodine za finansijsku pomoć pruženu kroz projekat Kratkoročni projekat

od posebnog značaja za održivi razvoj APV, ugovor broj 114-451-620/2015-03.

#### LITERATURA

- [1] K.F. Theodorchik, Root locus of the characteristic equation of a third-order system due to continuous alteration of the free term and maximal achievable stability, J. Tech. Phys. 18 (11) (1948) (in Russian).
- [2] W.R. Evans, Graphical analysis of control systems, Trans. AIEE 67 (1) (1948) 547-551.
- [3] W.R. Evans, Control System Dynamics, McGraw-Hill, 1954.
- [4] К.Ф. Теодорчик, Г.А. Бендриков, Упрощенные методы аналитического построения траектории корней, Автоматика и телемеханика, 24, No 2, 1963.
- [5] G.A. Bendrikov, K.F. Theodorchik, Root Locus Method for Linear Control Systems, Nauka, Moscow, 1964 (in Russian).
- [6] M.R. Stojić, Kontinualni sistemi automatskog upravljanja, Naučna knjiga, Beograd, 1996.
- [7] Č. Milosavljević, Teorija automatskog upravljanja 1, Istočno Sarajevo 2008.
- [8] K. Ogata, Modern Control Engineering, 3rd ed., Prentice Hall, 1997.
- [9] R.C. Dorf, R.H. Bishop, Modern Control Systems, 11th ed., Prentice Hall, 2008.
- [10] T.B. Šekara, Milan R. Rapaić, "A revision of root locus method with applications", *Journal of Process Control*, Vol. 34, pp. 26-34, 2015.

#### ABSTRACT

Root loci (RL) are curves in the complex plane showing dependence of closed-loop poles on a real parameter. Root loci is usually comprised of continuous curves, yet this is not always the case. This paper deals with discontinuous RL. The paper demonstrates and illustrates sketching rules for such root loci diagrams.

#### ANALYSIS OF DISCONTINUOUS ROOT LOCI OF CONTROL SYSTEMS

Tomislav B. Šekara, Milan R. Rapaić, Mirna Kapetina,  
Vidan Govedarica