INFOTEH-JAHORINA Vol. 15, March 2016.

Jednovremena estimacija parametara difuznih procesa

Mirna N. Kapetina, Milan R. Rapaić, Zoran D. Jeličić
Odsek za automatiku, geomatiku i upravljanje sistemima
Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu
Novi Sad, Srbija
mirna.kapetina@uns.ac.rs, rapaja@uns.ac.rs, jelicic@uns.ac.rs

Alessandro Pisano
Dipertimento di Engegneria Elettrica ed Elettronica
Universita degli Studi di Cagliari
Cagliari, Italia
pisano@diee.unica.it

Sažetak— **U ovom radu prikazano je jedno rješenje problema jednovremene estimacije (procjene) nepoznatih parametara sistema sa distribuiranim parametrima, konkretno difuznih procesa. Predloženi postupak može se smatrati uopštenjem gradijentnog algoritma koji se koristi za adaptivnu estimaciju parametara linearnih sistema. U okviru rada analizirani su uslovi lokalne konvergencije. Razmatranja su ilustrovana numeričkim primerom.**

Ključne riječi- Estimacija parametara; Gradijentni postupak; Stabilnost Ljapunova; Difuzni procesi;

I. UVOD

Složeni dinamički prostorno distribuirani sistemi, čije ponašanje se mijenja i u vremenu i u prostoru nazivaju se sistemi sa raspodijeljenim parametrima. Budući da su u ovim sistemima nezavisne promjenljive i vrijeme i prostorne koordinate, oni se opisuju parcijalnim diferencijalnim jednačinama. Ovakvi sistemi se modeluju iracionalnim funkcijama prenosa,i zavisno od prirode problema mogu da imaju i vremensko kašnjenje. Često neki od parametara sistema nisu poznati pa ih je neophodno identifikovati.

Kada je proces nelinearan klasičan postupak identifikacije parametara metodom najmanjih kvadrata se ne može primjeniti. U tom slučaju, do optimalnih vrijednosti parametara se može doći nekim od postupaka nelinearnog programiranja [1], ili ukoliko se klasična metoda najmanjih kvadrata kombinuje sa PSO algoritmom u cilju jednovremenog određivanja više parametara procesa što je prikazano u [2]. U ovom radu predložićemo postupak koji omogućava formiranje rekurzivnog (‘on-line’) algoritma estimacije parametara procesa koji se opisuje sa parcijalnim diferencijalnim jednačinama. Konkretno, razmatraćemo postupak koji omogućava estimaciju pojačanja, kašnjenja i još jednog nepoznatog parametara jednačine koja opisuje difuziju toplote kroz štap. Predloženi algoritam se zasniva na klasičnom gradijentnom algoritmu sa trenutnom funkcijom greške [3].

Svrha ovog rada jeste da prikaže osnovne principe adaptivne estimacije parametara sistemima. Jednostavnije primjena ovog algoritma su opisane u [4]-[6]. Dalja uopštenja i poboljšanja predloženog algoritma predmet su tekućih istraživanja i biće prikazana u narednim publikacijama.

Sadržaj rada je sledeći. U drugom odeljku dajemo kratak prikaz osnovnih pojmova vezanih za proces difuzije toplote kroz štap. Tu ćemo definisati oblik parcijalne jednačine i funkciju prenosa kojom opisujemo pomenuti proces. U trećem odeljku razmatraćemo gradijentni algoritam i izvešćemo uslove konvergencije predloženog postupka. U odeljku 4 prikazan je postupak jednovremne estimacije pojačanja, kašnjenja i još jednog parametra difuznog procesa, ilustrovana numeričkim primerom. Osnovni zaključci rada su ukratko izneti u petom odeljku.

II. DIFUZIJA TOPLOTE KROZ ŠTAP

Jedan od najjednostavnijih primjera sistema modelovanog sa pracijalnim diferencijalnim jednačinama je problem upravljanja temperaturom štapa dužine L sa konstantnim koeficijentom toplotne provodljivosti K_0, gustinom ρ i specifičnim toplotom materijala Cp. Primjenom I zakona termodinamike može se formirati parcijalna diferencijalna jednačin koja opisuje temperaturu $z(x,t)$ u trenutku t na poziciji x

$$C_p \rho \frac{\partial z(x,t)}{\partial t} = K_0 \frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial x^2}, \quad x \in (0,L), t \geq 0. \tag{1}$$

Da bi u potpunosti odredili temperaturu definisani su početni uslovi i u razmatranje su uzeti Dirihleovi granični uslovi koji podrazumjevaju da se upravlja temperaturom $u(t)$ na kraju štapa $x = L$ i da mjerimo temperaturu u tački x_0,

$$z(0,t) = 0; \; z(L,t) = u(t). \tag{2}$$

Mjerena temperatura u tački x_0 smatra se izlazom iz sistema:

$$y(t) = z(x_0,t). \tag{3}$$

Rješavanjem diferencijalne jednačine i primjenom Laplasove transformacije, što je opisano u [7], dobija se funkcija prenosa

Autori žele da se zahvale Ministarstvu nauke Republike Srbije za njihovu finansijsku podršku putem projekata TR32018 (M.N.K i Z.D.J), TR33013 (M.R.R). .Takođe, autori M.N.K. i M.R.R. se zahvaljuju i Pokrajinskom sekretarijatu za nauku i tehnološki razvoj Vojvodine za podršku putem kratkoročnog projekta od posebnog značaja za održivi razvoj APV, ugovor broj 114-451-620/2015-03.

$$G\left(x_0,s\right)=\frac{sinh\ (\frac{\sqrt{s}x_0}{\alpha})}{sinh\ (\frac{\sqrt{s}L}{\alpha})}. \quad (4)$$

koja predstavlja odnos Laplasove transformacije izlaza $y(t)$ i ulaza $u(t)$, gdje je $\alpha=\frac{K_0}{C_p\rho}$. Sistem je stabilan sto je pokazano u [7]. U svrhu demostriranja efikasnosti predloženog algoritma identifikacije, funkcija prenosa je proširena sa pojačanjem k i transportim kašnjenjem τ, i tada dobija formu:

$$G\left(x_0,s\right)=k\frac{sinh\ (\frac{\sqrt{s}x_0}{\alpha})}{sinh\ (\frac{\sqrt{s}L}{\alpha})}e^{-s\tau}. \quad (5)$$

III. ESTIMACIJA PARAMETARA

A. *Zakon estimacije*

Posmatrajmo sistem opisan funkcijom prenosa $G(s;\theta)$, gdje $\theta\in\mathrm{R}^q$ označava vektor nepoznatih parametar koje je neophodno estimirati. Označimo sa $u(t)\in\mathrm{R}^m$ ulaze, a sa $y(t)\in\mathrm{R}^p$ izlaze iz sistema, pri čemu je $p\geq q$, tada ćemo pisati

$$y(t)=G(s)*u(t), \quad (6)$$

umesto formalno korektnog, al nečitljivog zapisa

$$y(t)=\mathrm{L}^{-1}\left\{G(s)\mathrm{L}\left\{u(t)\right\}\right\} \quad (7)$$

gde su L^{-1} i L oznake za direktnu i inverznu Laplasovu transformaciju, respektivno. Notacija (6) je uobičajna u literaturi koja se bavi adaptivnim upravljanjem i estimacijom [3].

Tekuću procjenu parametara θ označićemo sa $\hat{\theta}(t)$ dok će "estimirani izlaz'' biti

$$\hat{y}\left(t;\hat{\theta}(t)\right)=G\left(s;\hat{\theta}(t)\right)u(t). \quad (8)$$

Simbol ($\tilde{\cdot}$) će se koristiti da označi razliku između stvarne i estimirane vrijednosti

$$\tilde{y}\left(t;\hat{\theta}(t)\right)=y(t)-\hat{y}\left(t;\hat{\theta}(t)\right), \quad (9)$$

$$\tilde{\theta}(t)=\theta-\hat{\theta}(t). \quad (10)$$

Da bi zapis bio manji u slučajevima kada je kontekst jasan, koristiće se $\hat{y}$ umjesto $\hat{y}((t,\hat{\theta}(t))$, a slična pojednostavljenja će biti primijenjena na $\tilde{y}$, $\hat{\theta}$ i $\tilde{\theta}$ takođe . Treba imati na umu da je $\tilde{y}$ mjerljiva vrijednost koje se može koristiti u okviru zakona adaptacije , dok je $\tilde{\theta}$ nepoznat u cjelini.

Predložićemo algoritam koji na osnovu zadatih ulaznih i merenih izlaznih signala procesa generiše procenu nepoznatih parametara θ. Definišimo kritrijum optimalnosti

$$J=\frac{1}{2}\tilde{y}^T\tilde{y} \quad (11)$$

koji ćemo minimizovati primjenom gradijentnog zakona [3]. U tom slučaju zakon adaptacije ima formu

$$\dot{\hat{\theta}}=-\Gamma\frac{\partial J}{\partial\hat{\theta}}, \quad (12)$$

gdje je Γ konstantna, simetrična i pozitivno definitna matrica, a $\frac{\partial J}{\partial\hat{\theta}}$ je gradijent od J po svim parametrima $\hat{\theta}$,tj

$$\frac{\partial J}{\partial\hat{\theta}_j}=\sum_{i=1}^{l}\tilde{y}_i\frac{\partial\tilde{y}_i}{\partial\hat{\theta}_j}=\sum_{i=1}^{l}\tilde{y}_i\frac{\partial\left(y_i-\hat{y}_i\right)}{\partial\hat{\theta}_j}=-\sum_{i=1}^{l}\frac{\partial\hat{y}_i}{\partial\hat{\theta}_j}\tilde{y}_i. \quad (13)$$

Pažljivim raspisivanjem izraza (12) i (13) lako nalazimo da je predloženi zakon adaptacije

$$\dot{\hat{\theta}}=\Gamma\left(\frac{\partial\hat{y}}{\partial\hat{\theta}}\right)^T\tilde{y}. \quad (14)$$

B. *Uslovi konvergencije*

Konvergenciju izraza (14) ispitivaćemo primjenom direktnog metoda Ljapunova [8]. U tom cilju, definisaćemo funkciju koja je strogo pozitivno definitna

$$V=\frac{1}{2}\tilde{\theta}^T\Gamma^{-1}\tilde{\theta}. \quad (15)$$

Njen izvod duž "trajektorije" procesa adaptacije (14) je

$$\dot{V}=\tilde{\theta}^T\Gamma^{-1}\dot{\tilde{\theta}}=-\tilde{\theta}^T\left(\frac{\partial\hat{y}}{\partial\hat{\theta}}\right)^T\tilde{y} \quad (16)$$

U cilju analize znaka izraza (16), primjetimo da na osnovu Tejlorovog razvoja i Langranžove teoreme (eng. *Mean Value*

Theorem), pogledati [9] i [10], važi da za svako t postoji broj $\xi_i(t)$ i $r_i(t)$, $i \in \{1,..,p\}$ tako da

$$y(t) = \hat{y}(t;\theta) = \hat{y}\left(t;\hat{\theta}(t) + \tilde{\theta}(t)\right)$$
$$= \hat{y}(t;\hat{\theta}(t)) + \sum_{i=1}^{p} r_i(t) \left.\frac{\partial \hat{y}\left(t;\hat{\theta}(t)\right)}{\partial \hat{\theta}}\right|_{\hat{\theta}(t)=\xi_i(t)} \tilde{\theta}(t), \quad (17)$$

gdje $\xi_i(t)$ leži u intervalu između stvarne i procjenjene vrijednosti parametra, odnosno,

$$\tilde{y} = \sum_{i=1}^{p} r_i \left.\frac{\partial \hat{y}}{\partial \hat{\theta}}\right|_{\hat{\theta}=\xi_i} \tilde{\theta}. \quad (18)$$

Uvrštavanjem izraza (18) u izvod kandidata Ljapunova (16) lako nalazimo da je

$$\dot{V} = -\tilde{\theta}^T \left(\frac{\partial \hat{y}}{\partial \hat{\theta}}\right)^T \left(\sum_{i=1}^{p} r_i \left.\frac{\partial \hat{y}}{\partial \hat{\theta}}\right|_{\hat{\theta}=\xi_i}\right) \tilde{\theta}$$
$$= -\tilde{\theta}^T \left(\sum_{i=1}^{p} r_i \mathrm{M}\left(\hat{\theta}, \xi_i\right)\right) \tilde{\theta} \quad (19)$$

Pri čemu je M simetrična matrica definisana kao

$$\mathrm{M}\left(\hat{\theta}, \xi\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \hat{y}}{\partial \hat{\theta}}\right)^T \left.\frac{\partial \hat{y}}{\partial \hat{\theta}}\right|_{\hat{\theta}=\xi} + \left.\left(\frac{\partial \hat{y}}{\partial \hat{\theta}}\right)^T\right|_{\hat{\theta}=\xi} \frac{\partial \hat{y}}{\partial \hat{\theta}}\right]. \quad (20)$$

Uvest ćemo oznaku $\mathrm{M}_0(\hat{\theta}) = \mathrm{M}(\hat{\theta}, \hat{\theta})$ i $\lambda_0 > 0$ za minimalnu sopstvenu vrijednost matrice M_0. Kako je po definiciji $\sum_i r_i = 1$, tada je

$$\dot{V} \le -\lambda_0 \tilde{\theta}^T \tilde{\theta}. \quad (21)$$

Znajući da se sopstvene vrijednosti matrice kontinualno mijenjaju zavisno od elemenata matrice refernca na rad [11], tada postoji $\varepsilon > 0$ i $0 < \lambda_1 < \lambda_0$ tako da

$$\dot{V} \le -\lambda_1 \tilde{\theta}^T \tilde{\theta} \quad (22)$$

kada je $\left\|\hat{\theta} - \hat{\theta}(0)\right\| < \varepsilon$. Time smo neposredno dokazali sledeće tvrđenje:

Teorema 1. *Posmatrajmo proces opisan sa (6) gdje θ vektor nepoznatih parametara. Pretpostavimo da se nepoznati parametri estimiraju koristeći zakon adaptacije (14) sa početnim vrijednostima prarametara estimacije $\hat{\theta}(0)$. Ako je najmanje sopstvena vrijednost matrice*

$$\mathrm{M}_0(\hat{\theta}(0)) = \left.\left(\left(\frac{\partial \hat{y}}{\partial \hat{\theta}}\right)^T \frac{\partial \hat{y}}{\partial \hat{\theta}}\right)\right|_{\hat{\theta}=\hat{\theta}(0)} \quad (23)$$

veća od nule, $\lambda_0 > 0$, za svako $t > 0$, tada postoji $\varepsilon > 0$ tako da $\tilde{\theta}(t)$ konvergira ka nuli kad god je $\left\|\tilde{\theta}(0)\right\| < \varepsilon$. □

IV. Estimaija parametara jednačine difuzije toplote

Pretpostavimo da su u procesu opisanom funkcijom prenosa (4) pojačanje k, transportno kašnjenje τ i parametar α nepoznati parametri koji čine vektor $\theta = [k\ \tau\ \alpha]^T$. U tom slučaju, za primjenu algoritma za estimaciju parametara opisanog u prethodnoj sekciji neophodno je da postoje najmanje 3 nezavisna izlaza iz sistema. S obzirom da sistem (4) im jedan ulaz i jedan izlaz taj probleme se može prevazići dovođenjem na ulaz sistema signal $u(t)$ koji predstavlja superpoziciju prostoperiodičnih signala i postavljanjem na izlaz sistema grupe filtara (u ovom slučaju dva) propusnika opsega koji će umnožiti broj izlaza. Predloženi ulazni signal je

$$u(t) = cos\ (\omega_1 t) + cos\ (\omega_2 t), \quad (24)$$

koji će u ustaljenom stanju na izlazu sistema dati odziv

$$y(t) = A_1(\theta) cos\left(\omega_1 t + \phi_1(\theta)\right)$$
$$+ A_2(\theta) cos\left(\omega_2 t + \phi_2(\theta)\right), \quad (25)$$

gdje je

$$A_i(\theta) = \left\|G(j\omega_i;\theta)\right\|,$$
$$\phi_i(\theta) = \angle G(j\omega_i;\theta),\ i = 1,2 \quad (26)$$

koje redom označavaju amplitudu i fazu funkcije prenosa $G(s;\theta)$ za frekvenciju ω_i. Korištenjem dva filtara poropusnika opsega koji redom propuštaju frekvencije ω_1 i ω_2 i diferenciranjem izlaza iz prvog filtra dobijamo sledećie skup izlaza:

$$y_1(t) = A_1(\theta) cos\left(\omega_1 t - \phi_i(\theta)\right), \quad (27)$$

$$y_2(t) = \dot{y}_1(t) = -\omega_1 A_1(\theta) sin\left(\omega_1 t - \phi_1(\theta)\right), \quad (28)$$

$$y_3(t) = A_2(\theta) cos\left(\omega_2 t - \phi_2(\theta)\right). \quad (29)$$

Estimirani izlazi bi imali oblik

$$\hat{y}_1(t) = A_1(\hat{\theta}) cos\left(\omega_1 t - \phi_i(\hat{\theta})\right), \tag{30}$$

$$\hat{y}_2(t) = -\omega_1 A_1(\hat{\theta}) sin\left(\omega_1 t - \phi_1(\hat{\theta})\right), \tag{31}$$

$$\hat{y}_3(t) = A_2(\hat{\theta}) cos\left(\omega_2 t - \phi_2(\hat{\theta})\right). \tag{32}$$

Vodeći se istim principima kao u prethodnom poglavlju, predlažemo gradijenti algoritam (12) uz kriterijum optimalnosti definisan izrazom (11) i zakonom adaptacije (14) , nalazimo da je

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{k}} \\ \dot{\hat{\tau}} \\ \dot{\hat{\alpha}} \end{bmatrix} = \Gamma \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{y}_1}{\partial \hat{k}} & \frac{\partial \hat{y}_2}{\partial \hat{k}} & \frac{\partial \hat{y}_3}{\partial \hat{k}} \\ \frac{\partial \hat{y}_1}{\partial \hat{\tau}} & \frac{\partial \hat{y}_2}{\partial \hat{\tau}} & \frac{\partial \hat{y}_3}{\partial \hat{\tau}} \\ \frac{\partial \hat{y}_1}{\partial \hat{\alpha}} & \frac{\partial \hat{y}_2}{\partial \hat{\alpha}} & \frac{\partial \hat{y}_3}{\partial \hat{\alpha}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}_3 \end{bmatrix}. \tag{33}$$

A. Konvergencija postipka

Kako bi se uprostila dalja analize, koristeći trigonometrijske identitete i množenjem izlaza y_1. i y_3 redom sa ω_1 i ω_2 , koje ne umanjuje valjanost daljeg postupka, nalazimo da je

$$\eta_1 = \omega_1 a_1 cos\ (\omega_1 t) + \omega_1 b_1 sin\ (\omega_1 t), \tag{33}$$

$$\eta_2 = -\omega_1 a_1 sin\ (\omega_1 t) + \omega_1 b_1 cos\ (\omega_1 t), \tag{34}$$

$$\eta_3 = \omega_2 a_2 cos\ (\omega_2 t) + \omega_2 b_2 sin\ (\omega_2 t), \tag{35}$$

gdje je $A_i(\theta) = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}$ and $\phi(\theta) = \arctan(\frac{b_i}{a_i})$, $i = 1, 2$.

Estimirane vrijednosti novoforminahih izlaznih signala imaju formu

$$\hat{\eta}_1 = \omega_1 \hat{a}_1 cos\ (\omega_1 t) + \omega_1 \hat{b}_1 sin\ (\omega_1 t), \tag{36}$$

$$\hat{\eta}_2 = -\omega_1 \hat{a}_1 sin\ (\omega_1 t) + \omega_1 \hat{b}_1 cos\ (\omega_1 t), \tag{37}$$

$$\hat{\eta}_3 = \omega_2 \hat{a}_2 cos\ (\omega_2 t) + \omega_2 \hat{b}_2 sin\ (\omega_2 t), \tag{38}$$

Izvršićemo i parametrizaciju nepoznatih parametara sa skupom novih parametara

$$\begin{bmatrix} \hat{k} \\ \hat{\tau} \\ \hat{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_1(\hat{\theta})}{\partial \hat{k}} & \frac{\partial b_1(\hat{\theta})}{\partial \hat{k}} & \frac{\partial a_2(\hat{\theta})}{\partial \hat{k}} \\ \frac{\partial a_1(\hat{\theta})}{\partial \hat{\tau}} & \frac{\partial b_1(\hat{\theta})}{\partial \hat{\tau}} & \frac{\partial a_2(\hat{\theta})}{\partial \hat{\tau}} \\ \frac{\partial a_1(\hat{\theta})}{\partial \hat{\alpha}} & \frac{\partial b_1(\hat{\theta})}{\partial \hat{\alpha}} & \frac{\partial a_1(\hat{\theta})}{\partial \hat{\alpha}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{b}_1 \\ \hat{a}_2 \end{bmatrix} \tag{39}$$

$$= \mathrm{T} \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{b}_1 \\ \hat{a}_2 \end{bmatrix}$$

Preslikavanje je bijekcija ukoliko je matrica T nesingularna [12] što je provjereno računanjem ranga matrice koji mora biti jednak dimenziji matrice, $rank(\mathrm{T}) = 3$, (zbog složenog računa korišten je programski alat Wolfram Mathematica) .

Po ugledu na (23) definišemo matricu M_0 za vektor nepoznatih parametara $[a_1\ b_1\ a_2]$ i za vektor estimiranih izlaza $[\eta_1\ \eta_2\ \eta_3]$

$$\mathrm{M}_0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{\eta}_1}{\partial \hat{a}_1} & \frac{\partial \hat{\eta}_2}{\partial \hat{a}_1} & 0 \\ \frac{\partial \hat{\eta}_1}{\partial \hat{b}_1} & \frac{\partial \hat{\eta}_2}{\partial \hat{b}_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \hat{\eta}_3}{\partial \hat{a}_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{\eta}_1}{\partial \hat{a}_1} & \frac{\partial \hat{\eta}_1}{\partial \hat{a}_2} & 0 \\ \frac{\partial \hat{\eta}_2}{\partial \hat{a}_1} & \frac{\partial \hat{\eta}_2}{\partial \hat{b}_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \hat{\eta}_3}{\partial \hat{a}_2} \end{bmatrix} \tag{40}$$

$$\mathrm{M}_0 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix} \tag{41}$$

Najmanja sopstvena vrijedost matrice M je $\lambda_0 = min\left(\omega_1^2, \omega_2^2\right)$ je pozitivna na osnovu čega možemo da tvrdimo da ukoliko su početne vrijednosti estimiranih parametara dovoljno bliske stvarnim vrijednostima greška estimacije će da konvergira ka nuli.

B. Numerički primer

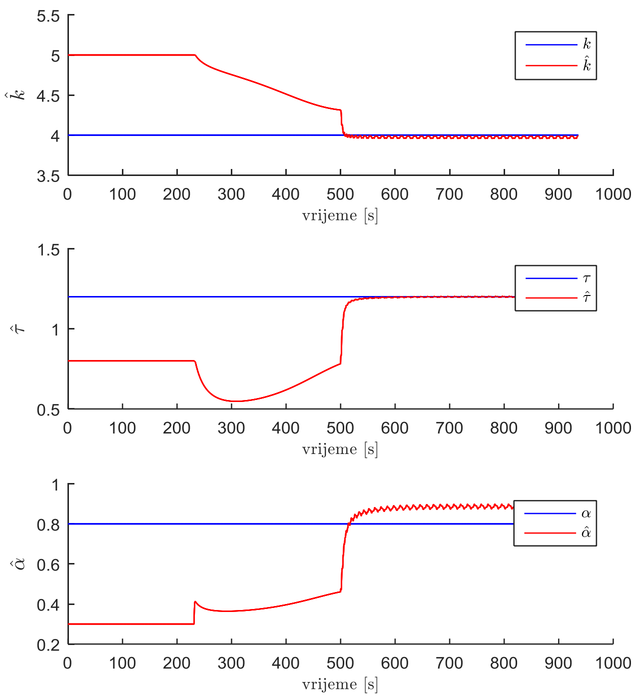
Rezultati numeričke simulacije potvrđuju prethodna teorijska razmatranja i prikazani su na narednim slikama. Simulacija je vršena u svrhu estimiranja parametara sistema

$$G(x_0,s)=4\frac{\sinh\left(\frac{\sqrt{s}0.5}{0.8}\right)}{\sinh\left(\frac{\sqrt{s}1}{0.8}\right)}e^{-1.2s}. \qquad (42)$$

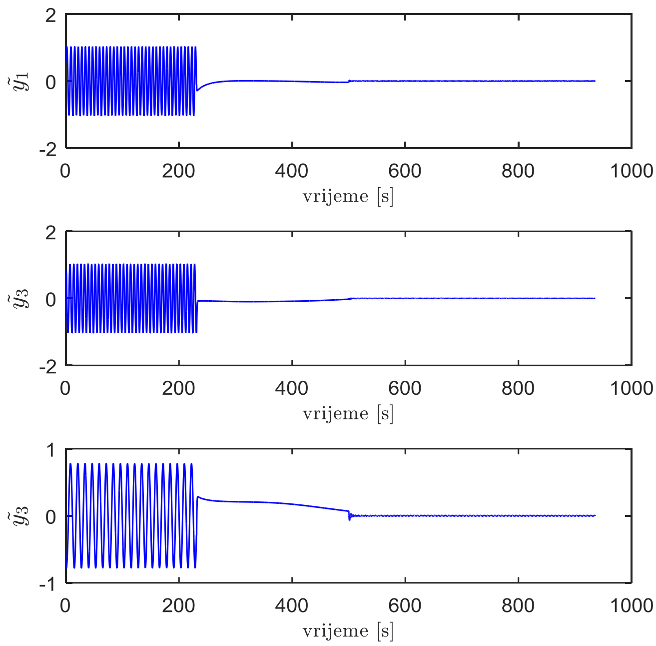
Za početne vrijednosti nepoznatih parametara odabrane su $\hat{k}(0)=5, \hat{\tau}(0)=0.8, \hat{\alpha}(0)=0.3$ a ulazni signal je imao vrijednost

$$u(t)=cos(t)+cos(0.5t); . \qquad (43)$$

Dobijeni rezultati prikazani su na sl. 1 i 2. Prvih 230 sekundi simulacije nije aktivan algoritam adaptacije i to vrijeme je bilo potrebno da bi se ustalio rad filtara na izlazu sistema. Na sl. 1 je prikazano kako estimirani parametri konvergiraju ka njihovoj stvarnoj vrijednosti. Jedino kod estimacije parametra α se primjećuje malo odstupanje između estimirane i stvarne vrijednosti. Pretpostavlja se da je to odstupanje posljedica "nesavršenosti" u konstrukciji filtara. Sl. 2 prikazuje razliku između izlaza iz stvarnog i estimiranog sistema.



Slika 1: Estimirane vrijednosti nepoznatih parametara



Slika 2: Razlika između izlaza iz sistema sa stvarnim i estimiranim parametrima

V. ZAKLJUČAK

U radu je prikazan algoritam za rekurzivnu („*on-line* ") estimaciju više parametara difuznog procesa. Pretpostavljeno je da su svi ostali parametri u modelu procesa poznati. Izvedeni su uslovi lokalne konvergencije postupka, uz oslonac na Ljapunovljev direktni metod. U narednim publikacijama razmotrićemo uticaj poremećaja na konvergenciju postupka. Takođe, razmotrićemo mogućnosti primjene prikazanog algoritma i na druge vrste procesa.

LITERATURA

[1] D. Maiti, A. Acharya, R. Janarthanan, A. Konar, "Complete Identification of a Dynamic Fractional Order System Under Non-Ideal Conditions Using Fractional Differintegral Definitions," 16th International Conference on Advanced Computing and Communications (ADCOM) Chennai 14−17 Dec. 2008.

[2] J. K. Popović, D. Dolićanin, M. R. Rapaić, S. L. Popović, S. Pilipović,T. M. Atanacković, „A non-linear two-compartmental fractional derivative model", European Journal of Drug Metabolism and Pharmacokinetics, 36(4):189–196 (2011)

[3] P. Ioannou, J. Sun, Robust Adaptive Control, Prentice Hall, 1996

[4] M. R. Rapaić, A. Pisano, "Procena reda jedne klase frakcionih procesa", Infoteh-Jahorina Vol. 11, March 2012.

[5] M.R. Rapaic, A. Pisano, "Variable-Order Fractional Operators for Adaptive Order and Parameter Estimation, " in *Automatic Control, IEEE Transactions on* , vol.59, no.3, pp.798-803, March 2014 doi: 10.1109/TAC.2013.2278136

[6] M. N. Kapetina, M. R. Rapaić, A. Pisano and Z. D. Jeličić, "Simultaneous estimation of gain and delay for linear stationary systems", Proc. of IcETRAN 2015, ISBN 978-86-7892-757-7, Silver Lake, Serbia

[7] Ruth Curtain, Kirsten Morris, “Transfer functions of distributed parameter systems: A tutorial”, Automatica, Volume 45, Issue 5, May 2009, Pages 1101-1116, ISSN 0005-1098, http://dx.doi.org/10.1016/j.automatica.2009.01.008.

[8] J.J. Slotine and W. Li , Applied Nonlinear Control, Prentice Hall, Englewood Cliffs 1991.

[9] P. K. Sahoo, T. Riedel “Mean Value Theorem and Functional Equations” , University of Louisville, World Scientific, 1998.

[10] R. M. McLeod “Mean Value Theorem for Vector Valued Functions” Proc. Edinburgh Math. Soc.,(1964), 197-209.

[11] G. H. Golub and C. F. Van Loan “Matrix Computations” The John Hopkins University Press, 1996

[12] D. Huybrechts, Complex Geometry: An Introduction, Springer-Verlag, Berlin 2005, pp.13-14.

ABSTRACT

Solution to the problem of simultaneous estimation of unknown parameters of distributed parameter systems has been considered in this paper. The proposed method can be considered as a generalization of the gradient method, usually utilized for parameter estimation of linear, finite dimensional systems. Formal convergence conditions have been addressed, and all considerations have been illustrated.

SIMULTANEOUS PARAMETER ESTIMATION OF DIFFUSION PROCESS

Mirna N. Kapetina, Milan R. Rapaić, Alessandro Pisano and Zoran D. Jeličić