

# Diskretizacija PID regulatora, optimalno podešavanje parametara i implementacija u LabView

Igor Tomić

Student prvog ciklusa studija

Fakultet tehničkih nauka

Novi Sad, Srbija

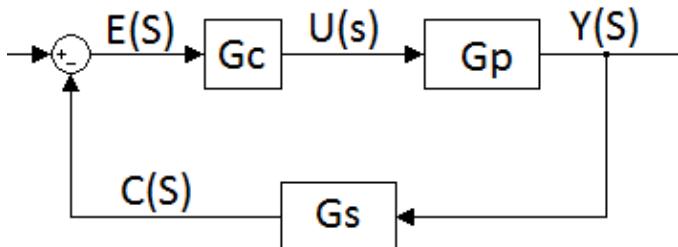
[teslabn@gmail.com](mailto:teslabn@gmail.com)

**Sadržaj**—U ovom radu biće prikazan postupak diskretizacije klasičnog PID regulatora sa filtrom na D (diferencijalnom) dejstvu, kao i diskretizacija funkcije prenosa procesa drugog reda i funkcije prenosa senzora prvog reda u povratnoj sprezi. Biće prikazano i optimalno podešavanje parametara u “Matlab”-u i “Simulink”-u, implementacija rješenja u “LabView” softverskom okruženju i simulacija u istom. Simulacija je propočena sa slikama grafika koji pokazuju ponašanje cijelog sistema. Sve u cilju dobijanja diskretnog sistema u prostom matematičkom obliku sa prostim matematičkim operacijama kako bi se mogao implementirati na bilo koji digitalni uređaj.

**Ključne riječi**-PID; Diskretizacija; optimalno podešavanje parametara; Simulink; Matlab; LabView

## I. UVOD

Proporcionalno-Integralno-Diferencijalni regulator (PID regulator) je mehanizam za upravljanje u povratnoj sprezi, široko korišten u kontroli industrijskih sistema [1]. Klasičan PID regulator se u proteklim decenijama pozicionirao kao vodeći upravljački algoritam u industriji. Postoji veoma veliki broj njegovih različitih varijacija u strukturi, kao i mnoštvo tehniku podešavanja parametara. Njegova popularnost dolazi zbog njegove jednostavne strukture, intuitivnog načina rada i malog broja parametara [2]. Uz klasičan PID se nalazi i filter na D (diferencijalnom) dejstvu, koji je takvog oblika da ograničava pojačanje greške na visokim frekvencijama tj. šum. Blok dijagram cijelog sistema prikazan je na slici Sl. 1.



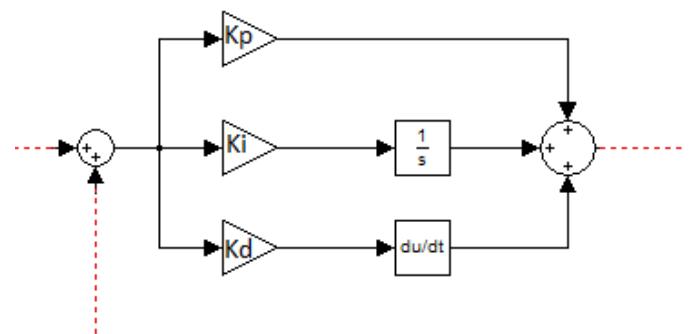
Slika 1. Blok dijagram sistema.

Za funkciju prenosa procesa  $G_p$  sa Sl. 1 je korišten matematički model drugog reda, a za funkciju prenosa senzora  $G_s$  sa Sl. 1 je korišten matematički model prvog reda.

Optimalno podešavanje parametara je izvedeno uz pomoć Matlaba i njegovog alata Simulink. PID regulator sa procesom i senzorom je simuliran u Simulink-u, a zatim je sistem diskretizovan i implementiran u LabView softverskom okruženju. Na kraju su upoređeni rezultati odziva PID-a i simulacija procesa.

## II. PID REGULATOR

PID regulator teži da minimizuje grešku u ustaljenom stanju. Greška se racuna kao razlika trenutne vrijednosti na izlazu sistema i željene vrijednosti. Blok dijagram klasičnog PID regulatora prikazan je na slici Sl. 2.



Slika 2. Blok dijagram PID regulatora.

Poznati matematički model PID regulatora sa filtrom prvog reda na D dejstvo u svojoj osnovnoj formi u Laplasovom domenu dat je sa

$$G_{pid}(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + \frac{k_d s}{T_f s + 1}, \quad (1)$$

gde su  $k_p$ ,  $k_i$ ,  $k_d$  i  $T_f$  proporcionalno, integralno, diferencijalno pojačanje i vremenska konstanta filtra, redom.

U algoritam rada PID regulatora uključene su tri stalne promjenljive od kojih P dejstvo djeluje proporcionalno tako što vrijednost  $k_p$  konstante množi sa greškom, I dejstvo djeluje integralno tako što radi sabiranje grešaka i množenje sa konstantom  $k_i$ , a D dejstvo predviđa buduće greške na osnovu trenutne brzine promjene greške i množi sa konstantom  $k_d$ . Suma ova tri navedena dejstva PID regulatora se koristi za računanje upravljanja procesa.

Četvrta promjenljiva kod klasičnog regulatora datog u formi (1) je filter koji ograničava pojačanje na visokim frekvencijama što se može lako videti i iz

$$\frac{k_d s}{T_f s + 1} \rightarrow s = j\omega. \quad (2)$$

Iz (2) se vidi da se filter u Laplasovom domenu zamjenjuje sa vremenskim domenom.

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{k_d j\omega}{T_f j\omega + 1} = \frac{k_d}{T_f}. \quad (3)$$

### III. METODE DISKRETIZACIJA

Za diskretizaciju funkcija prenosa postoji više metoda diskretizacije. Najkorišteniji su Euler I (korak naprijed) prikazan jednačinom (4),

$$\dot{X}(kT) \approx \frac{X(kT+T) - X(kT)}{T} \quad (4)$$

Euler II (korak nazad) prikazan jednačinom (5),

$$\dot{X}(kT) \approx \frac{X(kT) - X(kT-T)}{T} \quad (5)$$

i Tustin (srednja vrijednost dva susjedna koraka) prikazan jednačinom (6).

$$\dot{X}(kT) \approx \frac{X(kT+T) - X(kT-T)}{2T} \quad (6)$$

Promjenljiva  $kT$  predstavlja trenutak u vremenu a promjenljiva  $T$  je vrijeme odabiranja tj. brzina jednog ciklusa izvršavanja algoritma i iznosi  $T = 0.01$ .

### IV. DISKRETIZACIJA PID-A

Na sledećim jednačinama je prikazana korak po korak diskretizacija PID regulatora sa filtrom na D dejstvu. Prva jednačina (7) predstavlja funkciju prenosa PID regulatora.

$$\frac{U(s)}{E(s)} = k_p + \frac{k_i}{s} + \frac{k_d s}{T_f s + 1} \quad (7)$$

Množenjem greške  $E(s)$  sa desnim dijelom jednačine dobija se (8) jednačina. Zbog oslobađanja od razlomaka na D dejstvu množi se sa  $T_f s + 1$ .

$$U(s) = k_p E(s) + \frac{k_i}{s} E(s) + \frac{k_d s}{T_f s + 1} E(s) \quad (8)$$

Potrebno je oslobiti se i razlomka na I dejstvu što je postignuto množenjem jednačine (9) sa  $s$ .

$$(T_f s + 1)U(s) = k_p (T_f s + 1)E(s) + \frac{k_i}{s} (T_f s + 1)E(s) + k_d s E(s) \quad (9)$$

U dobijenoj jednačini (10) nema više razlomaka i sada se pretvara u oblik (11) iz koga se radi diskretizacija.

$$(T_f s^2 + s)U(s) = k_p (T_f s^2 + s)E(s) + k_i (T_f s + 1)E(s) + k_d s^2 E(s) \quad (10)$$

Tačke iznad promjenljivih u jednačini (11) predstavljaju vremenske izvode. Broj tački je broj koraka u prošlosti ili budućnosti zavisno kojom metodom se diskretizuje.

$$T_f \ddot{u} + \dot{u} = k_p (T_f \ddot{e} + \dot{e}) + k_i (T_f \dot{e} + e) + k_d \ddot{e} \quad (11)$$

U jednačini (11) se nalaze i promjenljive koje su drugi izvod (dvije tačke iznad), a u jednačinama (4)-(6) se diskretizuje promjenljiva prvog izvoda (jedna tačka iznad). Radi toga, kako bi se dobila diskretizacija drugog izvoda, potrebno je još jednom diskretizovati promjenljivu prvog izvoda. Diskretizacija se mora uraditi istom metodom kao i prethodni put, pa za jednačinu (5) tj. Euler II, to izgleda ovako

$$\ddot{X}(kT) \approx \frac{X(kT) - 2X(kT-T) + X(kT-2T)}{T^2}. \quad (12)$$

Za diskretizaciju PID regulatora korištena je metoda Euler II (korak nazad), tako da u jednačini (11) promjenljive  $u$  i  $e$  sa tačkama se predstave korištenjem jednačina (5) i (12), a promjenljive bez tački se zapišu kao trenutni trenutak. U vremenskom domenu se dobije sledeća jednačina (13).

$$\begin{aligned} T_f \left( \frac{u(k) - 2u(k-1) + u(k-2)}{T^2} \right) + \frac{u(k) - u(k-1)}{T} = \\ k_p (T_f \left( \frac{e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)}{T^2} \right) + \frac{e(k) - e(k-1)}{T}) + \\ k_i (T_f \left( \frac{e(k) - e(k-1)}{T} \right) + e(k)) + \\ k_d \left( \frac{e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)}{T^2} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

Oslobađanje od razlomaka u dobijenoj jednačini (13) se vrši množenjem cijele jednačine sa  $T^2$ .

$$\begin{aligned} T_f (u(k) - 2u(k-1) + u(k-2)) + T(u(k) - u(k-1)) = \\ k_p (T_f (e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)) + T(e(k) - e(k-1))) + \\ k_i (T_f T(e(k) - e(k-1)) + e(k)) + \\ k_d (e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)) \end{aligned} \quad (14)$$

Iz lijeve jednakosti, dobijene jednačine (14) izvlači se  $u(k)$  jer je i prvenstveni cilj diskretizacije računanje upravljanja. Sve

ostalo sa lijeve strane se prebacuje na desnu stranu jednakosti što se vidi u jednačini (15).

$$\begin{aligned} (T_f + T)u(k) &= k_p(T_f(e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)) + \\ &T(e(k) - e(k-1))) + k_i(T_f T(e(k) - T^2 e(k-1)) + \\ &e(k)) + k_d(e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)) + \\ &T_f(2u(k-1) - u(k-2) + Tu(k-1)) \end{aligned} \quad (15)$$

Sa lijeve strane je ostalo  $T_f + T$  koje se prebacuje na desnu, tako da desnu jednakost dijeli. Na kraju se dobije jednačina (16).

$$\begin{aligned} u(k) &= \frac{1}{T_f + T} \{k_p(T_f(e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)) + \\ &T(e(k) - e(k-1))) + k_i(T_f T(e(k) - T^2 e(k-1)) + \\ &e(k)) + k_d(e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)) + \\ &T_f(2u(k-1) - u(k-2) + Tu(k-1))\} \end{aligned} \quad (16)$$

Dobijeni diskretizovani oblik PID regulatora je sada spreman za implementaciju na bilo kom digitalnom uređaju. Kao što se da primjetiti u jednačini figurišu proste matematičke operacije i promjenljive do dva koraka unazad za  $u(k)$  i  $e(k)$ . Rješenje se vidi u implementaciji.

## V. DISKRETIZACIJA PROCESA GP

Funkcija prenosa procesa  $Gp$  drugog reda u Laplasovom domenu izgleda ovako

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{3s^2 + 3s + 2}. \quad (17)$$

Proces  $Gp$  je diskretizovan metodom Euler I (korak naprijed) (4). Oslobađanje od razlomaka se izvodi unakrsnim množenjem.

$$U(s) = 3s^2 Y(s) + 3s Y(s) + 2Y(s) \quad (18)$$

U jednačini (18) nema više razlomaka pa se pretvara u oblik pogodan za diskretizaciju.

$$u = 3\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y \quad (19)$$

Pošto je PID regulator diskretizovan metodom Euler II (korak nazad), proces  $Gp$  je diskretizovan metodom Euler I (korak naprijed) kako bi se pokazao postupak diskretizacije za obje metode. Funkcija prenosa procesa  $Gp$  je drugog reda tako da u jednačini (19) imamo promjenljivu najviše drugog izvoda (dvije tačke). Jednačina koja se primjenjuje za promjenljive drugog izvoda je ista jednačina (4) kao za prvi izvod samo još jednom diskretizovana istom metodom kao prvi put. Za Euler I metodu to izgleda ovako

$$\ddot{x}(kT) \approx \frac{X(kT+2T) - 2X(kT+T) + X(kT)}{T^2} \quad (20)$$

Kada se jednačina (19) diskretizuje metodom Euler I, dobijamo oblik (21) u vremenskom domenu.

$$\begin{aligned} u(k) &= 3\left(\frac{y(k+2) - 2y(k+1) + y(k)}{T^2}\right) + \\ &3\left(\frac{y(k+1) + y(k)}{T}\right) + 2y(k) \end{aligned} \quad (21)$$

Kada se cijela jednačina pomnoži sa  $T^2/3$  dobije se sledeće.

$$\begin{aligned} \frac{T^2}{3}u(k) &= y(k+2) - 2y(k+1) + y(k) + \\ &T(y(k+1) + y(k)) + \frac{2T^2}{3}y(k) \end{aligned} \quad (22)$$

Sada u jednačini (22) figurišu promjenljive koje tek treba da se izračunaju u sledećim koracima, zbog toga promjenljivu koja nam označava izlaz iz sistema, a to je  $y$  sa najvećim korakom ostavljamo sa jedne strane jednačine, a sve ostalo na drugu stranu jednačine. Što se može vidjeti na sledećoj jednačini (23).

$$\begin{aligned} y(k+2) &= 2y(k+1) - y(k) + \frac{T^2}{3}u(k) - \\ &T(y(k+1) + y(k)) - \frac{2T^2}{3}y(k) \end{aligned} \quad (23)$$

Praktično u jednačini (23) je dobijeno računanje izlaza iz sistema za korak  $k+2$ , a nama je potrebno računanje koraka u trenutku izvršavanja jednačine. Zbog toga je potrebno da se cijela jednačina pomjeri za dva koraka unazad.

$$\begin{aligned} y(k) &= 2y(k-1) - y(k-2) + \frac{T^2}{3}u(k-2) - \\ &T(y(k-1) + y(k-2)) - \frac{2T^2}{3}y(k-2) \end{aligned} \quad (24)$$

U jednačini (24) figurišu samo vrijednosti promjenljivih iz prethodnih koraka. Tako da je jednačina (24) spremna za implementaciju.

## VI. DISKRETIZACIJA SENZORA GS

Funkcija prenosa senzora  $Gs$  prvog reda u Laplasovom domenu izgleda ovako

$$\frac{C(s)}{Y(s)} = \frac{1}{0.25s + 1}. \quad (25)$$

Funkcija prenosa senzora  $Gs$  (25) je diskretizovana metodom Euler I. Unakrsnim množenjem se dobija sledeće

$$Y(s) = 0.25sC(s) + C(s). \quad (26)$$

Pošto u jednačini (26) nema više razlomaka, može se zapisati u obliku (27) pogodnom za diskretizaciju.

$$y = 0.25\dot{c} + c \quad (27)$$

Korištenjem jednačine (4) za diskretizaciju metodom Euler I, dobija se sledeća jednačina (28) u vremenskom domenu.

$$y(k) = 0.25\left(\frac{c(k+1) - c(k)}{T}\right) + c(k) \quad (28)$$

Množenjem cijele jednačine sa  $T/0.25$  dobija se sledeće.

$$\frac{T}{0.25} y(k) = c(k+1) - c(k) + \frac{T}{0.25} c(k) \quad (29)$$

Izlaz iz senzora označava promjenljiva  $c$ , tako da je potrebno da ona bude sa jedne strane jednačine, a sve ostalo sa druge strane jednačine. Promjenljiva za izlaz sistema se uzima sa najvećim korakom naprijed, a to je  $c(k+1)$ .

$$c(k+1) = -c(k) + \frac{T}{0.25} c(k) + \frac{T}{0.25} y(k) \quad (30)$$

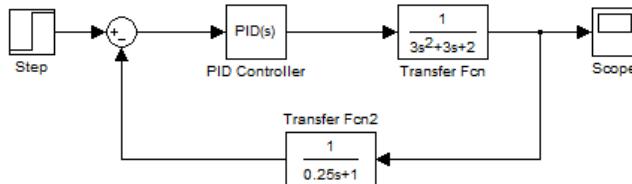
Pošto je diskretizacija izvedena metodom Euler I (korak naprijed), jednačina prednjači za jedan korak. Potrebno je pomjeriti cijelu jednačinu unazad za jedan korak.

$$c(k) = -c(k-1) + \frac{T}{0.25} c(k-1) + \frac{T}{0.25} y(k-1) \quad (31)$$

U jednačini (31) figurišu promjenljive koju su izračunate u prethodnom koraku. Funkcija prenosa senzora je diskretizovana i spremna za implementaciju.

## VII. OPTIMALNO PODEŠAVANJE PARAMETARA PID-A

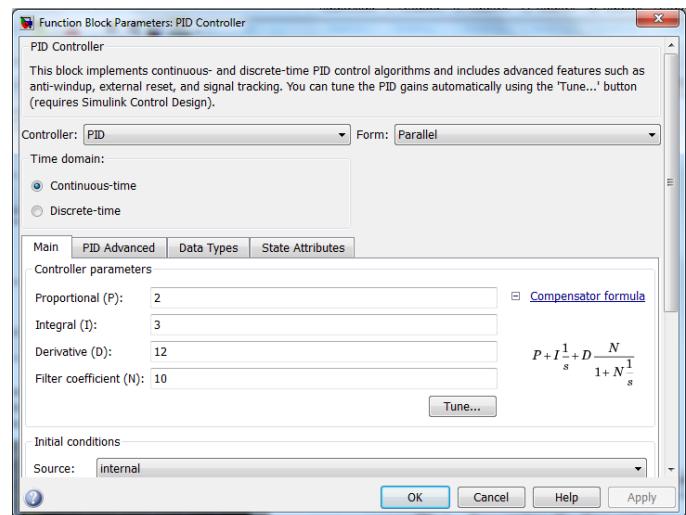
Optimalno podešavanje parametara je izvedeno korištenjem Matlab-ove nadogradnje tj. „Simulink“-a. Sl. 3 predstavlja izgled sistema u „Simulink“-u opisanog u ovom radu.



Slika 3. Izgled sistema u „Simulink“-u.

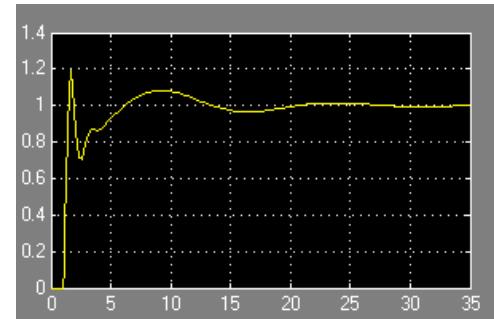
Nacrtani sistem u „Simulink“-u sadrži sve elemente sistema. Kao ulaz u sistem koristi se step signal vrijednosti 1, a izlaz iz sistema se iscrtava na „Scope“ elementu.

Duplim klikom na PID regulator otvara se prozor kao što je prikazano na Sl. 4.



Slika 4. Podešavanje parametara PID-a.

U prozoru sa Sl 4 se vide parametri sva tri dejstva PID-a, izlaz (odziv) sistema na tako podešene parametre se vidi na grafiku Sl. 5.

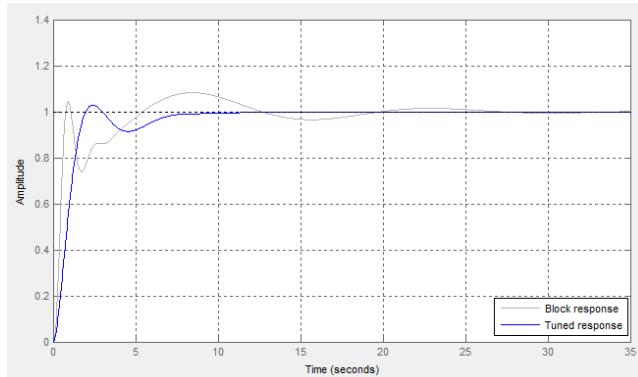


Slika 5. Izlaz sistema prije optimalnih podešenih parametara.

Na grafiku Sl. 5. se jasno vidi veliki preskok od željene vrijednosti i veliko vrijeme čekanja da se sistem nađe u ustaljenom stanju, oko 35s.

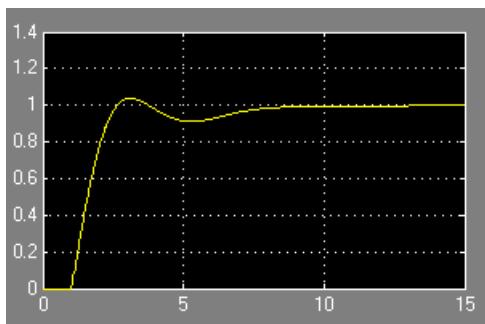
Cilj automatskog upravljanja je minimizacija maksimalne vrijednosti greške, minimizacija vremena smirenja i minimizacija reziduala greške. Tri najčešća kriterijuma dobrog upravljanja je opadanje greške za četvrtinu amplitude, minimizacija integrala apsolutne greške i kritično prigušenje.

Na prozoru prikazanom slikom Sl. 4 nalazi se dugme „Tune...“ koje po već predefinisanim algoritmima pronalazi optimalne parametre PID-a za dati sistem. Klikom na dugme, dobija se prozor sa grafikom na kome je iscrtan odziv na stare podešene parametre obojen sivom bojom i odziv na optimalno podešene parametre obojen plavom bojom. Predstavljeno je na Sl. 6.



Slika 6. Optimalno podešeni parametri PID-a.

Jasno se vide ispunjeni svi ciljevi automatskog i dobrog upravljanja, a optimalni parametri za podešavanje PID regulatora su:  $P = 4.12677236799367$ ,  $I = 1.75096070261853$ ,  $D = 2.41589531797259$  i  $T_f = 0.0667$ . Na Sl. 7 je prikazan izlaz (odziv) sistema sa optimalno podešenim parametrima.

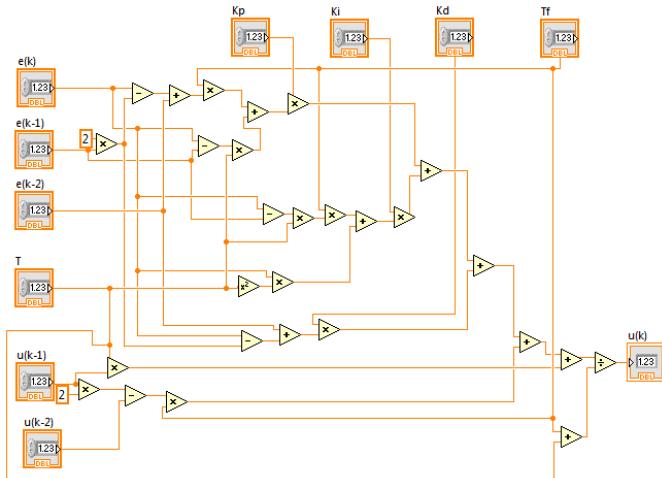


Slika 7. Izlaz sistema sa optimalno podešenim parametrima.

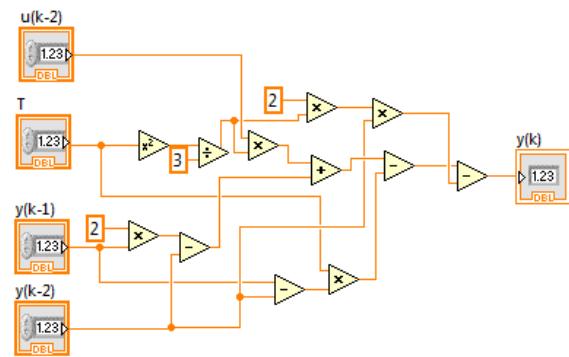
## VIII. IMPLEMENTACIJA SISTEMA U LABVIEW

„LabView“ je softverski proizvod kompanije „National Instruments“ namjenjen kako za kontrolu, simulaciju i projektovanje bilo kakvih sistema tako i za razvijanje projekata i algoritama za profesionalnu upotrebu u industriji. Baziran je na vizuelno-grafikom programiranju.

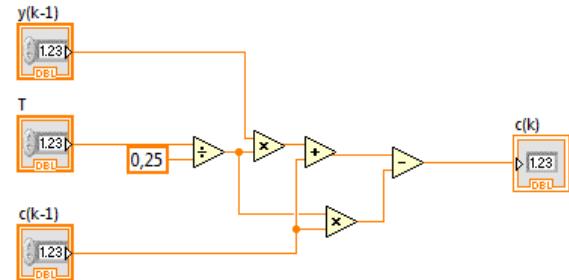
Na sledećim slikama je prikazana implementacija PID regulatora, procesa i senzora redom.



Slika 8. Implementiran PID regulator u „LabView“.

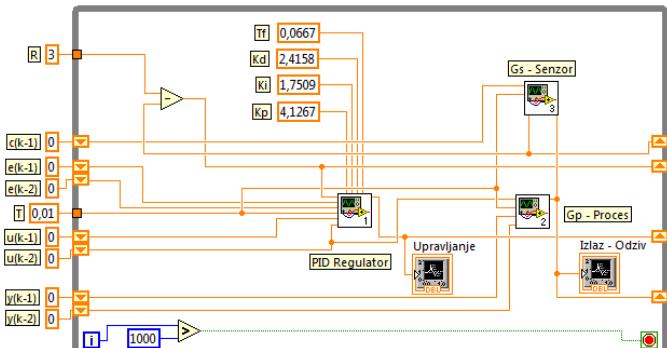


Slika 9. Implementiran proces sistema u „LabView“.



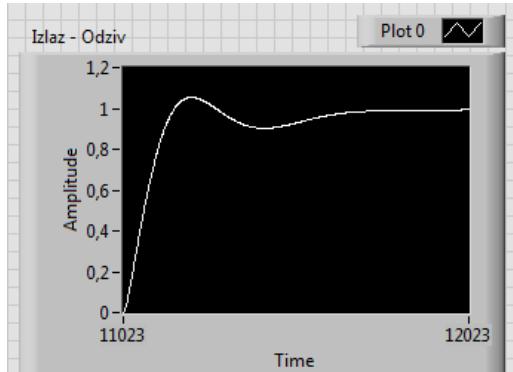
Slika 10. Implementiran senzor sistema u „LabView“.

Na sledećoj slici Sl. 11 je prikazan implementiran cijeli sistem sa PID regulatorom, procesom i senzorom.



Slika 11. Implementiran cijeli sistem u LabView

Sivi pravougaoni okvir predstavlja „While“ petlju u kojoj se izvršava kod računanja greške, PID regulatora, procesa i senzora. Lijevo od petlje se nalaze inicijalne vrijednosti promjenljivih (crvene kocke) i pomjeračkih registara (narandžasti pravougaonici sa strelicom prema dole). U petlji se nalaze i zadate vrijednosti oprimalnih parametara PID-a, koje su povezane sa PID regulatorom. Proces, senzor i PID regulator su realizovani kao „SubVI“ kodovi i uključeni u glavni kod. Linija plave boje daje vrijednosti iteratora petlje, a sa uslovom je ograničen taj broj iteracija na 1000. Izlaz sistema se iscrtava na „Waveform Chart“ komponenti. Izlaz (odziv) sistema prikazan je na Sl. 11 i očevidno je da diskretizovan sistem daje identičan izlaz kao sistem u Laplasovom domenu implementiran u „Simulink“-u. Uporediti slike Sl. 7 i Sl. 12.



Slika 12. Izlaz diskretnog sistema implementiranog u „LabView“.

#### ZAKLJUČAK

U ovom radu detaljno je prikazana diskretizacija sistema sa PID regulatorom, procesom i senzorom. Pomoću najkorištenijih metoda za diskretizaciju Euler I i Euler II i optimalnim podešavanjem parametara preko „Simulink“-a. Kao i implementacija cijelog sistema u „LabView“.

#### ZAHVALNICA

Rad je pisan neposredno posle kursa iz predmeta „Upravljački algoritmi u realnom vremenu“. Zahvalnicu upućujem Boris B. Jakovljević-u.

#### LITERATURA

- [1] [http://en.wikipedia.org/wiki/PID\\_controller](http://en.wikipedia.org/wiki/PID_controller)
- [2] Boris B. Jakovljević, Milan R. Rapaić, Mirna N. Kapetina, "Uporedna analiza performansi jedne klase linearnih optimalnih regulatora celog i necelog reda", INFOTEH-JAHORINA Vol. 13, March 2014.

#### ABSTRACT

This paper presents the procedure of discretization of the classical PID controller with filter on D (differential) effects, as well as the discretization process transfer function and transfer function of the sensor feedback. It will be shown optimal parameter setting in "Matlab" "Simulink", implementation in "LabView" software and simulation in the same. Simulation is accompanied with images graphics that show the behavior of the whole system. In order to obtain a discrete system in a simple mathematical form with simple mathematical operations so that it can be implemented on any digital device.

#### DISCRETIZATION OF PID CONTROLLER, THE OPTIMAL PARAMETER SETTING AND IMPLEMENTATION IN LABVIEW

Igor Tomić