

Magnetno polje torusnog induktora

Đorđe Lekić, Petar Matić
Katedra za elektroenergetiku
Elektrotehnički fakultet
Banja Luka, Republika Srpska, BiH
djordje.lekic@etfbl.com, pero@etfbl.net

Sažetak—U radu je razmatrano magnetno polje jedne faze Teslinog dvofaznog induktora sa gvozdenim jezgrom torusnog oblika i kružnog poprečnog presjeka. Rješavanjem Laplace-ove jednačine u torusnom koordinatnom sistemu određena je funkcija magnetnog skalar-potencijala, kao i komponente vektora magnetne indukcije u svim tačkama prostora izvan torusa. Rezultati proračuna su verifikovani mjerenjima u laboratoriji.

Ključne riječi—Teslin dvofazni induktor; Laplace-ova jednačina; torusni koordinatni sistem

I. UVOD

Dostupna literatura obiluje primjerima proračuna elektrostatickog i stacionarnog strujnog polja za različite raspodjele naelektrisanja i stacionarnih struja na provodnicima torusnog oblika [1]-[6]. Određivanje funkcije električnog skalar-potencijala u tim slučajevima se svodi na rješavanje Laplace-ove jednačine u torusnim koordinatama. Međutim, primjeri u kojima bi se razmatralo kvazistacionarno magnetno polje za date raspodjele struja, tj. magnetopobudnih sila (MPS), na feromagnetnim torusnog oblika autorima nisu poznati.

U ovom radu se razmatra magnetno polje raspodjeljenog namotaja, sastavljenog iz dva jednaka dijela (polunamotaja), koji su postavljeni na naspramne strane feromagnetnog jezgra torusnog oblika i kružnog poprečnog presjeka. Ovakva postavka problema je proistekla iz potrebe određivanja magnetnog polja jedne faze Teslinog dvofaznog induktora [7]. Teslin dvofazni induktor je zapravo torusni stator dvofaznog asinhronog motora. Fazni namotaji induktora su prostorno razmaknuti za 90° (geometrijskih) i napajaju se naizmjeničnim prostoperiodičnim strujama, koje su međusobno fazno pomaknute za 90° (električnih), stvarajući obrtno magnetno polje u prostoru izvan torusa. Metalno jaje postavljeno na platformu iznad torusa se obrće oko svoje ose, ilustrujući na jedan zanimljiv način efekte Teslinog obrtnog magnetnog polja. Tesla je rad svog induktora prvi put prikazao na Svjetskoj izložbi u Čikagu 1893. godine, pa još od tada postoji potreba za izradom odgovarajućih replika. Upravo je svrha ovog rada pronalaženje jednostavnih obrazaca koji bi bili primjenljivi pri projektovanju ovakvog uređaja.

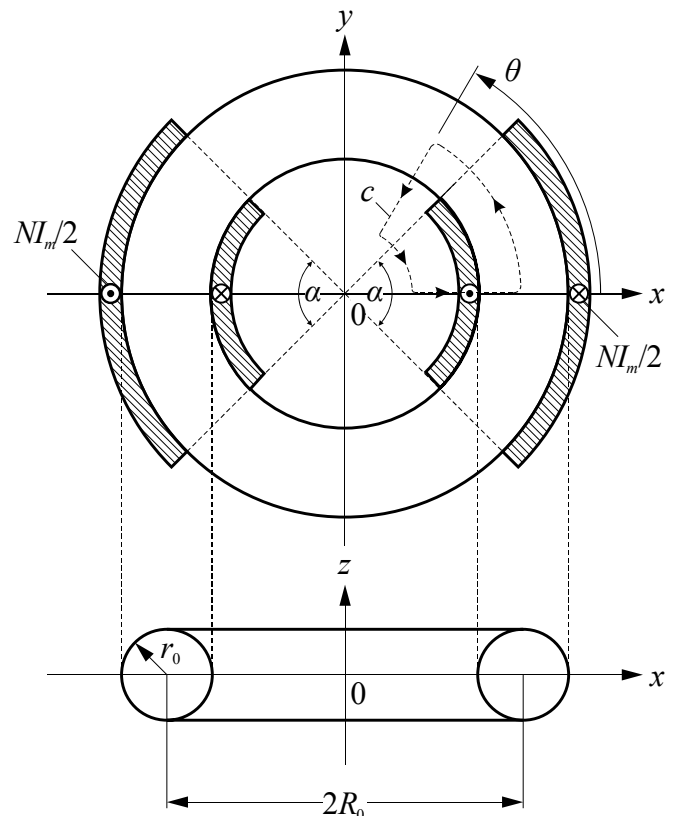
U poglavlju II definisana je geometrija problema koji će biti razmatran u nastavku rada. Određene su raspodjele obodne gustine struje i MPS na površini torusnog jezgra u vidu Fourier-ovih redova. Poglavlje III sadrži postupak rješavanja Laplace-ove jednačine za postavljenu geometriju i granične uslove, s ciljem određivanja funkcije magnetnog skalar-potencijala u svim tačkama prostora izvan torusa. Na osnovu

funkcije magnetnog skalar-potencijala, određeni su i izrazi za ortogonalne komponente vektora magnetne indukcije u torusnom koordinatnom sistemu, te je dat jednostavan izraz za proračun magnetne indukcije duž srednje ose torusa. Rezultati proračuna su ilustrovani računarskim simulacijama. U poglavlju IV je data uporedna analiza rezultata proračuna i rezultata mjerenja na primjeru laboratorijskog modela Teslinog dvofaznog induktora.

II. POSTAVKA PROBLEMA

A. Geometrija problema

Na Sl. 1 je prikazano torusno jezgro sa kružnim poprečnim presjekom, velikog poluprečnika R_0 i malog poluprečnika r_0 . Dva gusto namotana polunamotaja, predstavljena kontinualnim strujnim plaštevima sa po $N/2$ navojaka, su postavljena na naspramne strane torusnog jezgra i kroz njih protiče struja amplitude I_m u naznačenom smjeru. Svaki polunamotaj zauzima pojas širine $\alpha = \pi/2$.



Slika 1. Prikaz geometrije problema

B. Raspodjela obodne gustine struje i MPS

Magnetno polje u prostoru izvan torusa zavisi, prije svega, od raspodjele struja na površini torusnog jezgra. Osnovna veličina koja opisuje strujnu raspodjelu je obodna gustina struje $J(\theta)$ koja se definiše kao ukupna struja po jedinici ugla θ mjenjenog po obimu torusa [8]. Raspodjela obodne gustine struje po obimu torusa prikazanog na Sl. 1 je data na Sl. 2. i može se predstaviti u obliku Fourier-ovog reda:

$$J(\theta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} J_{m\nu} \cdot \cos(\nu \cdot \theta), \quad (1)$$

Amplituda ν -tog harmonika obodne gustine struje je:

$$J_{m\nu} = \frac{2}{\pi} \cdot \alpha \cdot k_{m\nu} \cdot J_m, \quad (2)$$

gdje je amplituda obodne gustine struje sa Sl. 2:

$$J_m = \frac{N \cdot I_m}{2 \cdot \alpha}, \quad (3)$$

dok je tzv. navojni sačinilac za ν -ti harmonik [8]:

$$k_{m\nu} = \frac{\sin\left(\nu \cdot \frac{\alpha}{2}\right)}{\nu \cdot \frac{\alpha}{2}}, \quad (4)$$

Raspodjelu MPS određujemo na osnovu raspodjele obodne gustine struje, prema sljedećem definicionom izrazu [8]:

$$F(\theta) = \int_0^{\theta} J(\theta) \cdot d\theta. \quad (5)$$

Sa Sl. 2 vidimo da se za kvazipravougaonu raspodjelu obodne gustine struje dobija trapezna raspodjela MPS po obimu torusnog jezgra. Kao i obodna gustina struje i MPS se može prikazati u obliku Fourier-ovog reda:

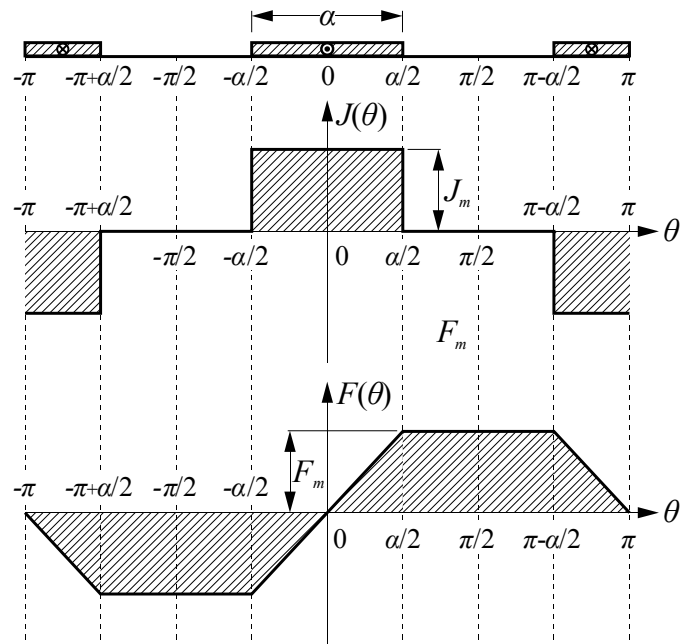
$$F(\theta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_{m\nu} \cdot \sin(\nu \cdot \theta). \quad (6)$$

Amplituda ν -tog harmonika MPS je:

$$F_{m\nu} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{k_{m\nu}}{\nu} \cdot F_m, \quad (7)$$

gdje je amplituda MPS sa Sl. 2:

$$F_m = \frac{1}{4} \cdot N \cdot I_m. \quad (8)$$



Slika 2. Raspodjela obodne gustine struje i MPS

III. RJEŠAVANJE PROBLEMA

A. Postavljanje graničnih uslova

Problem koji treba riješiti se sastoji u određivanju funkcije magnetnog skalar-potencijala u prostoru izvan torusa za prethodno definisanu raspodjelu MPS na njegovoj površini. Pri tome se pretpostavlja da je torus od feromagnetika beskonačne permeabilnosti, kao i da permeabilnost okolnog prostora u kome nema makroskopskih struja iznosi $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m. Tada u svim tačkama izvan torusa magnetni skalar-potencijal V zadovoljava Laplace-ovu jednačinu [9]:

$$\Delta V = \nabla^2 V = 0, \quad (9)$$

u kojoj je ∇ „nabla“ operator, dok je $\Delta = \nabla^2$ operator „laplasijan“. Vektor magnetne indukcije \mathbf{B} , kao i vektor jačine magnetnog polja \mathbf{H} u prostoru izvan torusa se tad računaju iz gradijenta magnetnog skalar-potencijala:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \cdot \mathbf{H} = -\mu_0 \cdot \nabla V. \quad (10)$$

Prema Ampere-ovom zakonu, cirkulacija vektora \mathbf{H} duž zatvorene konture c na Sl. 1 je jednaka ukupnoj struji, tj. ukupnoj MPS, obuhvaćenj tom konturom:

$$\oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{\theta} J(\theta) \cdot d\theta = F(\theta). \quad (11)$$

Kako se kontura dijelom proteže kroz vazduh, a dijelom kroz feromagnetno jezgro beskonačne permeabilnosti, cirkulacija duž zatvorene konture postaje jednaka linijskom integralu vektora \mathbf{H} duž putanje koja prolazi kroz vazduh i povezuje dvije tačke na površini torusa.

U tom slučaju je razlika magnetskih skalar-potencijala između bilo koje dvije tačke na površini torusa zapravo jednaka ukupnoj MPS između tih tačaka:

$$V(\theta) - V(0) = \int_c^{\theta} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{\theta} J(\theta) \cdot d\theta = F(\theta). \quad (12)$$

Ako u jednačini (12) odaberemo $V(0) = 0$, zaključujemo da je za tako odabran referentni potencijal raspodjela magnetnog skalar-potencijala na površini torusnog jezgra jednaka raspodjeli MPS, što nam daje neophodan granični uslov za rješavanje Laplace-ove jednačine (9).

B. Rješavanje Laplace-ove jednačine

Da bi se Laplace-ova jednačina (9) mogla riješiti metodom razdvajanja promjenljivih, neophodno je definisati pogodan koordinatni sistem. Zbog geometrije problema, pogodno je izabrati torusne koordinate (η, ξ, θ) , koje su povezane sa cilindričnim koordinatama (r, θ, z) sljedećim izrazima [1]-[6]:

$$r = a \cdot \frac{\sinh \eta}{\cosh \eta - \cos \xi}, \quad (13)$$

$$z = a \cdot \frac{\sin \xi}{\cosh \eta - \cos \xi}, \quad (14)$$

u kojima je a – konstanta koja predstavlja poluprečnik kruga u (x, y) ravni za $z = 0$, koji se dobija u graničnom slučaju za $\eta \rightarrow \infty$. Opsezi u kojima leže vrijednosti torusnih koordinata definisanih izrazima (13) i (14) su $0 \leq \eta < \infty$, $-\pi < \xi < \pi$ i $0 \leq \theta < 2\pi$. Ortogonalne površine u torusnom koordinatnom sistemu su torusne površine ($\eta = const.$), sferne površine sa zajedničkim kružnim otvorom poluprečnika a u (x, y) ravni ($\xi = const.$) i poluravni ($\theta = const.$). Na Sl. 3 su prikazane krive $\eta = const.$ i $\xi = const.$ u (r, z) ravni.

Površina torusa sa Sl. 1 je definisana konstantnom η_0 u torusnom koordinatnom sistemu, pri čemu za prostor izvan torusa vrijedi $\eta < \eta_0$. Veliki i mali poluprečnik torusa sa Sl. 1 su u tom slučaju povezani sljedećim izrazima [1]-[6]:

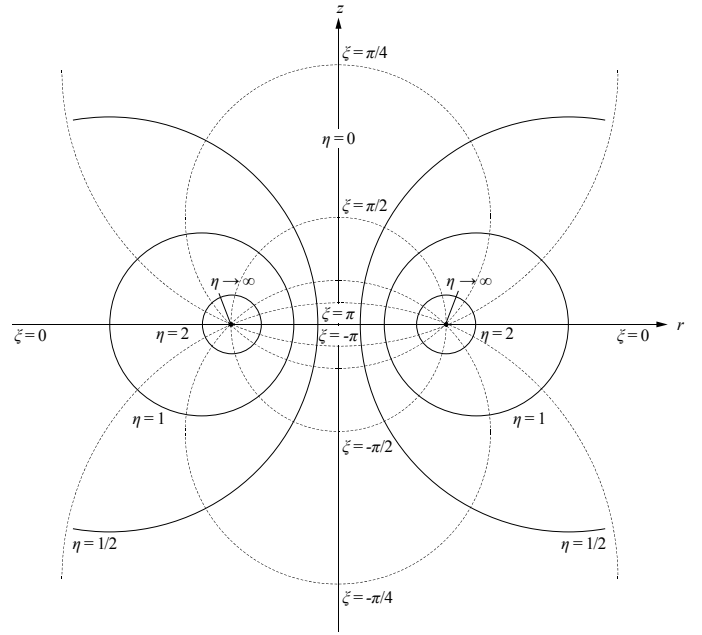
$$R = a \cdot \text{ctgh} \eta_0 = r_0 \cdot \cosh \eta_0. \quad (15)$$

Rješenje Laplace-ove jednačine (9) za magnetni skalar-potencijal u torusnom koordinatnom sistemu je dato u sljedećem obliku [1]-[6]:

$$V(\eta, \xi, \theta) = \sqrt{\cosh \eta - \cos \xi} \cdot H(\eta) \cdot X(\xi) \cdot T(\theta), \quad (16)$$

pri čemu funkcije $H(\eta)$, $X(\xi)$ i $T(\theta)$ zadovoljavaju sljedeće diferencijalne jednačine [1]-[6]:

$$\left(\cosh^2 \eta - 1 \right) \cdot \frac{d^2 H}{d\eta^2} + 2 \cdot \cosh \eta \cdot \frac{dH}{d\eta} - \left[\left(n^2 - \frac{1}{4} \right) + \frac{m^2}{\cosh^2 \eta - 1} \right] \cdot H = 0, \quad (17)$$



Slika 3. Krive $\eta = const.$ i $\xi = const.$ u (r, z) ravni

$$\frac{d^2 X}{d\xi^2} + n^2 \cdot X = 0, \quad (18)$$

$$\frac{d^2 T}{d\theta^2} + m^2 \cdot T = 0, \quad (19)$$

u kojima su m i n cjelobrojne konstante.

Opšta rješenja diferencijalnih jednačina (17), (18) i (19) su data sljedećim izrazima [1]-[6]:

$$H(\eta) = A_{mn}^\eta \cdot P_{n-1/2}^m(\cosh \eta) + B_{mn}^\eta \cdot Q_{n-1/2}^m(\cosh \eta), \quad (20)$$

$$X(\xi) = A_n^\xi \cdot \sin(n \cdot \xi) + B_n^\xi \cdot \cos(n \cdot \xi), \quad (21)$$

$$T(\theta) = A_m^\theta \cdot \sin(m \cdot \theta) + B_m^\theta \cdot \cos(m \cdot \theta), \quad (22)$$

u kojima su A_{mn}^η , B_{mn}^η , A_n^ξ , B_n^ξ , A_m^θ i B_m^θ odgovarajuće konstante, dok su $P_{n-1/2}^m(\cosh \eta)$ i $Q_{n-1/2}^m(\cosh \eta)$ torusne Legendre-ove funkcije prve i druge vrste.

Granični uslov koji mora zadovoljiti funkcija magnetnog skalar-potencijala (16) na površini torusnog jezgra sa Sl. 1, tj. za $\eta = \eta_0$, je dat sljedećom jednačinom:

$$V(\eta_0, \xi, \theta) = F(\theta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_{m\nu} \cdot \sin(\nu \cdot \theta). \quad (23)$$

Iz izraza (23) zaključujemo da je $m = \nu$, kao i da je $B_m^\theta = 0$. Osim toga, zaključujemo da se rješenjem oblika (16) ne može zadovoljiti granični uslov (23), ali da je to moguće superpozicijom više rješenja tog oblika za razne vrijednosti cjelobrojnih konstanti m i n .

Prostor izvan torusa obuhvata i z-osu za koju vrijedi $\eta = 0$. Kako torusna Legendre-ova funkcija druge vrste $Q_{n-1/2}^\nu(\cosh \eta)$ za $\cosh \eta \rightarrow 1$ poprima beskonačno velike vrijednosti, zaključujemo da ona ne može biti dio rješenja, tako da je $B_{mn}^\eta = 0$. Stoga dobijamo sljedeći izraz:

$$V(\eta, \xi, \theta) = \sqrt{\cosh \eta - \cos \xi} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P_{n-1/2}^\nu(\cosh \eta) \cdot \sin(\nu \cdot \theta) \cdot [C_{n\nu} \cdot \sin(n \cdot \xi) + D_{n\nu} \cdot \cos(n \cdot \xi)] \quad (24)$$

gdje su C_n^ξ i D_n^ξ nove konstante. Uvrštavajući izraz (24) u granični uslov (23) dobijamo sljedeću jednakost:

$$\frac{F_{m\nu}}{\sqrt{\cosh \eta_0 - \cos \xi}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_{n-1/2}^\nu(\cosh \eta_0) \cdot [C_n^\xi \cdot \sin(n \cdot \xi) + D_n^\xi \cdot \cos(n \cdot \xi)] \quad (25)$$

Funkciju sa lijeve strane jednakosti (25) možemo razviti u Fourier-ov red [1]-[6]:

$$\frac{1}{\sqrt{\cosh \eta_0 - \cos \xi}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{Q_{n-1/2}(\cosh \eta_0)}{1 + \delta_{0n}} \cdot \cos(n \cdot \xi), \quad (26)$$

pri čemu je δ_{0n} Kronecker-ov delta simbol koji je jednak nuli za $n \neq 0$, dok je za $n = 0$ jednak jedinici. Poređenjem izraza (25) i (26) zaključujemo da je $D_{n\nu} = 0$, dok je:

$$C_{n\nu} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{F_{m\nu}}{1 + \delta_{0n}} \cdot \frac{Q_{n-1/2}(\cosh \eta_0)}{P_{n-1/2}^\nu(\cosh \eta_0)}, \quad (27)$$

tako da je funkcija magnetnog skalar-potencijala konačno data sljedećim izrazom:

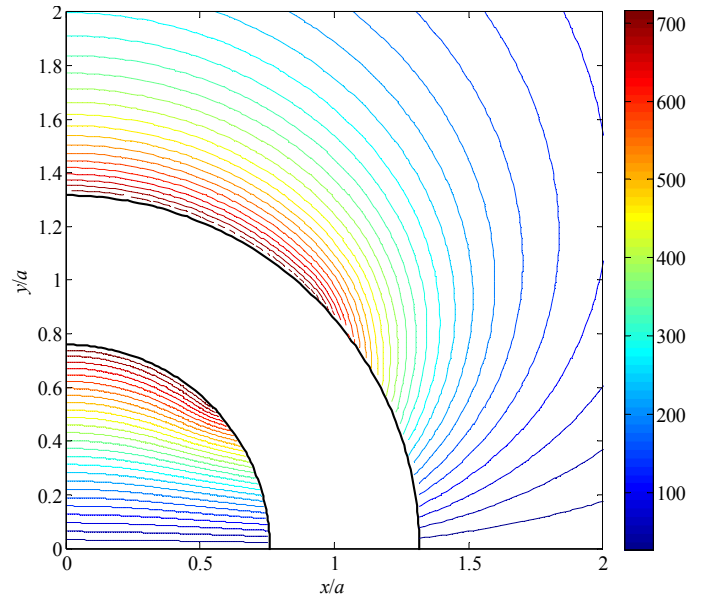
$$V(\eta, \xi, \theta) = \sqrt{\cosh \eta - \cos \xi} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{n\nu} \cdot P_{n-1/2}^\nu(\cosh \eta) \cdot \sin(n \cdot \xi) \cdot \sin(\nu \cdot \theta) \quad (28)$$

Na osnovu izraza (28) proračunat je magnetni skalar potencijal za prvi kvadrant (x, y) i (y, z) ravni, te su na Sl. 3 i Sl. 4 prikazane odgovarajuće ekvipotencijalne linije. Proračun je izvršen za sljedeće parametre: $\nu_{max} = 100$, $n_{max} = 10$, $a = 9,87$ cm, $\eta_0 = 1,9903$. Ovi parametri su odabrani tako da odgovaraju modelu induktora na kome su vršena mjerenja.

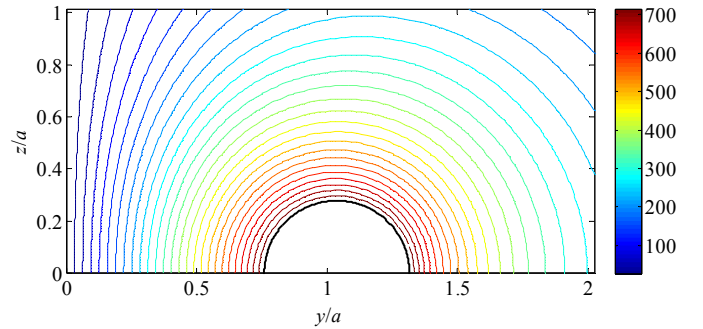
C. Proračun magnetne indukcije

Na osnovu izraza (10) dobijamo ortogonalne komponente vektora magnetne indukcije u torusnim koordinatama:

$$\mathbf{B}_\eta = -\mu_0 \cdot \frac{\cosh \eta - \cos \xi}{a} \cdot \frac{\partial V}{\partial \eta} \cdot \mathbf{u}_\eta, \quad (29)$$



Slika 4. Ekvipotencijalne linije magnetnog skalar-potencijala u (x, y) ravni



Slika 5. Ekvipotencijalne linije magnetnog skalar-potencijala u (y, z) ravni

$$\mathbf{B}_\xi = -\mu_0 \cdot \frac{\cosh \eta - \cos \xi}{a} \cdot \frac{\partial V}{\partial \xi} \cdot \mathbf{u}_\xi, \quad (30)$$

$$\mathbf{B}_\theta = -\mu_0 \cdot \frac{\cosh \eta - \cos \xi}{a \cdot \sinh \eta} \cdot \frac{\partial V}{\partial \theta} \cdot \mathbf{u}_\theta, \quad (31)$$

gdje su \mathbf{u}_η , \mathbf{u}_ξ i \mathbf{u}_θ jedinični vektori (ortovi) u torusnom koordinatnom sistemu. Uvrštavanjem izraza (28) za magnetni skalar-potencijal u izraze (29), (30) i (31), dobijamo:

$$\mathbf{B}_\eta = -\mu_0 \cdot \sqrt{\cosh \eta - \cos \xi} \cdot \frac{\sinh \eta}{2 \cdot a} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{n\nu} \cdot \sin(n \cdot \xi) \cdot \sin(\nu \cdot \theta) \cdot [P_{n-1/2}^\nu(\cosh \eta) + 2 \cdot (\cosh \eta - \cos \xi) \cdot P_{n-1/2}'(\cosh \eta)] \cdot \mathbf{u}_\eta, \quad (32)$$

$$\mathbf{B}_\xi = -\mu_0 \cdot \frac{\sqrt{\cosh \eta - \cos \xi}}{2 \cdot a} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{n\nu} \cdot \sin(\nu \cdot \theta) \cdot P_{n-1/2}^\nu(\cosh \eta) \cdot [\sin \xi \cdot \cos(n \cdot \xi) - 2 \cdot n \cdot (\cosh \eta - \cos \xi) \cdot \sin(n \cdot \xi)] \cdot \mathbf{u}_\xi, \quad (33)$$

$$\mathbf{B}_\theta = -\mu_0 \cdot \frac{(\cosh \eta - \cos \xi)^{3/2}}{a \cdot \sinh \eta} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{n\nu} \cdot \nu \cdot \cos(\nu \cdot \theta) \cdot \cos(n \cdot \xi) \cdot P_{n-1/2}^\nu(\cosh \eta) \cdot \mathbf{u}_\theta, \quad (34)$$

Izrazi (32), (33) i (34) nam daju vrijednosti ortogonalnih komponenti vektora magnetne indukcije u svim tačkama prostora izvan torusa, ali su nepraktični za primjenu. Međutim, pri projektovanju Teslinog dvofaznog induktora najviše nas zanima raspodjela amplitude vektora magnetne indukcije duž srednje ose torusa, tj. duž z -ose koordinatnog sistema na Sl. 1. Iz izraza (32) i (33) je jasno da duž z -ose postoji samo komponenta \mathbf{B}_θ vektora magnetne indukcije, dok ostale komponente iščezavaju, jer za $\eta = 0$ vrijedi $\sinh \eta = 0$ i $P_{n-1/2}^\nu(\cosh \eta) = 0$. Da bismo odredili \mathbf{B}_θ za $\eta = 0$, razvijamo funkcije hiperbolnog sinusa i kosinusa u Taylor-ov red i zadržavamo samo prva dva člana u razvoju:

$$\cosh \eta \approx 1 + \frac{\eta^2}{2}, \quad (35)$$

$$\sinh \eta \approx \eta \cdot \left(1 + \frac{\eta^2}{6}\right), \quad (36)$$

dok Legendre-ovu funkciju prvog reda razvijamo na sljedeći način [1]-[6]:

$$P_{n-1/2}^\nu(\cosh \eta) \approx P_{n-1/2}^\nu \left(1 + \frac{\eta^2}{2}\right) \approx \frac{\Gamma(\nu + n + 1/2)}{\Gamma(-\nu + n + 1/2) \cdot \nu!} \cdot \left(\frac{\eta}{2}\right)^\nu \cdot \left[1 + \frac{\eta^2}{2} \cdot \left(\frac{n^2 - 1/4}{2 \cdot (1 + \nu)} - \frac{\nu}{4}\right)\right], \quad (37)$$

gdje je Γ gama funkcija. Upotrebom izraza (36) i (37) nalazimo sljedeću graničnu vrijednost:

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{P_{n-1/2}^\nu(\cosh \eta)}{\sinh \eta} = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(n + 3/2)}{\Gamma(n - 1/2)}, & \nu = 1 \\ 0, & \nu > 1 \end{cases}. \quad (38)$$

Na osnovu rezultata (38) nalazimo sljedeću vrijednost vektora magnetne indukcije duž z -ose:

$$\mathbf{B}_\theta(0, \xi, \theta) = -\mu_0 \cdot \frac{(1 - \cos \xi)^{3/2}}{2 \cdot a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} C_{n1} \cdot \cos \theta \cdot \cos(n \cdot \xi) \cdot \frac{\Gamma(n + 3/2)}{\Gamma(n - 1/2)} \cdot \mathbf{u}_\theta, \quad (39)$$

Kako vrijednosti torusne Legendre-ove funkcije druge vrste $Q_{n-1/2}^\nu(\cosh \eta)$ veoma brzo opadaju sa porastom koeficijenta n , dok vrijednosti Legendre-ove funkcije prve vrste $P_{n-1/2}^\nu(\cosh \eta)$ veoma brzo rastu sa porastom

koeficijenta n , opravdano je zanemariti njihov količnik u izrazu (27) za $n > 0$, tako da za vrijednost vektora magnetne indukcije duž z -ose dobijamo sljedeću aproksimaciju:

$$\mathbf{B}_\theta(0, \xi, \theta) \approx \mu_0 \cdot \frac{(1 - \cos \xi)^{3/2}}{8 \cdot a} \cdot C_{01} \cdot \cos \theta \cdot \mathbf{u}_\theta, \quad (40)$$

pri čemu vrijednosti gama funkcija u izrazu (39) za $n = 0$ iznose $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi} / 2$ i $\Gamma(3/2) = -2\sqrt{\pi}$. Ako uzmemo da za $x = 0$ i $y = 0$ vrijedi sljedeći izraz [1]:

$$\cos \xi = \frac{z^2 - a^2}{z^2 + a^2}, \quad (41)$$

za vrijednost vektora magnetne indukcije duž z -ose torusnog induktora dobijamo sljedeći izraz:

$$\mathbf{B}_\theta(0, z, \theta) = \mu_0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot C_{01} \cdot \frac{a^2 \cdot \cos \theta}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \cdot \mathbf{u}_\theta, \quad (42)$$

u kome je:

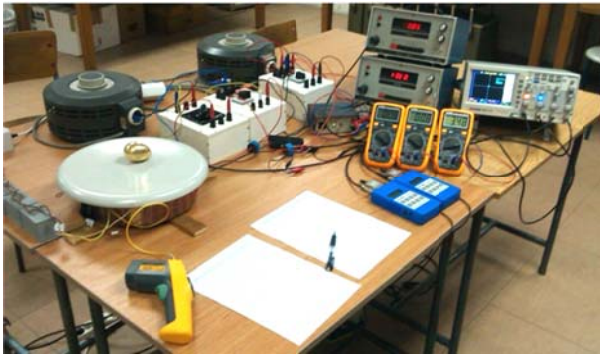
$$C_{01} = \frac{\sqrt{2}}{\pi^2} \cdot k_{n1} \cdot N \cdot I_m \cdot \frac{Q_{-1/2}(\cosh \eta_0)}{P_{-1/2}(\cosh \eta_0)}. \quad (43)$$

Iz izraza (42) zaključujemo da duž z -ose postoji samo osnovni harmonik magnetne indukcije, kao i da on iščezava sa udaljavanjem od torusa.

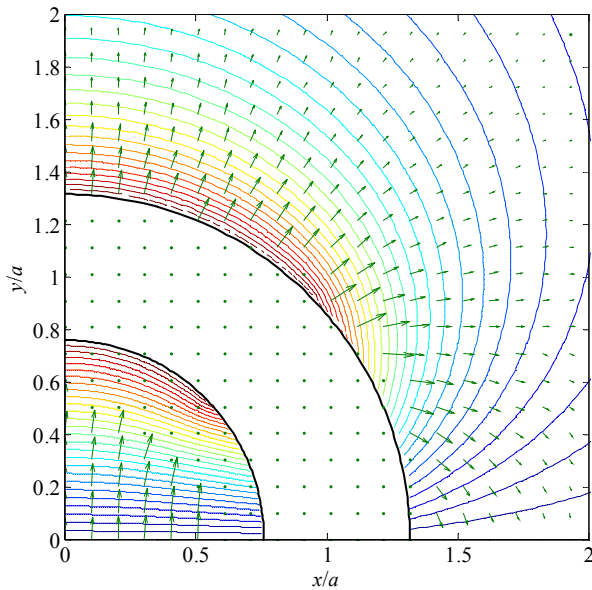
IV. EKSPERIMENTALNA VERIFIKACIJA

Za potrebe verifikacije sprovedenih proračuna, izvršena su mjerenja na modelu Teslinog dvofaznog induktora u laboratoriji za električne mašine Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Banjoj Luci (Sl. 6). Iako su proračuni vršeni za torus kružnog poprečnog presjeka, čime je omogućeno rješavanje Laplace-ove jednačine u torusnom koordinatnom sistemu, torus na kome su sprovedena mjerenja u laboratoriji je iz praktičnih razloga pravougaonog poprečnog presjeka. Dimenzije modela Teslinog dvofaznog induktora korištenog u eksperimentu su date u referenci [7] i u skladu sa oznakama na Sl. 8 iznose: $R_0 = 10,25$ cm, $r_0 = 5,5$ cm, $h = 6$ cm i odgovaraju parametrima a i η_0 koji su korišteni pri proračunu magnetnog skalar-potencijala prikazanog na Sl. 4 i Sl. 5. Namotaj za koji su vršena mjerenja je imao ukupno $N = 1050$ navojaka, dok je amplituda struje u svim eksperimentima iznosila $I_m = 2,83$ A.

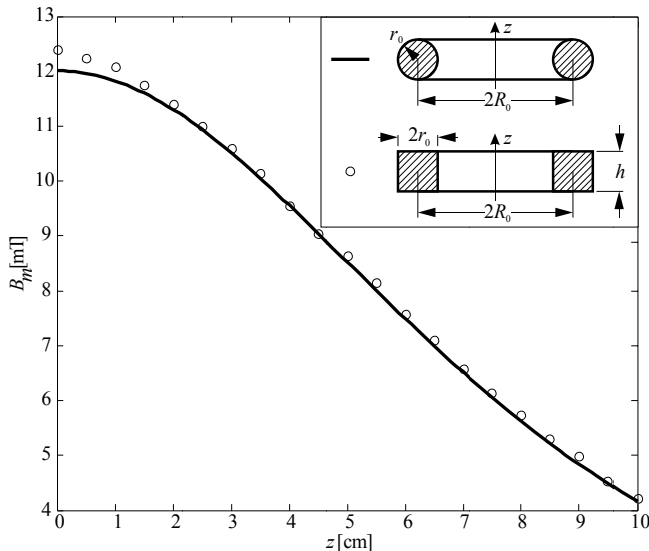
Prvo je izvršeno mjerenje x i y komponente vektora magnetne indukcije u određenom broju tačaka prvog kvadranta (x, y) ravni. Na Sl. 7 je, zajedno sa poljem magnetnog skalar-potencijala koji je dobijen proračunom, ucrtno i polje vektora magnetne indukcije koje je dobijeno mjerenjem. Sa Sl. 7 se može uočiti da je u praktično svim tačkama posmatranog domena vektor magnetne indukcije normalan na ekvipotencijalne linije.



Slika 6. Laboratorijska postavka



Slika 7. Polje magnetnog skalar potencijala dobijeno proračunom i polje vektora magnetne indukcije dobijeno mjerenjem



Slika 8. Amplituda magnetne indukcije duž z-ose dobijena proračunom (puna linija) i mjerenjem na laboratorijskom modelu

Zatim je izvršeno mjerenje y komponente vektora magnetne indukcije, tj. θ komponente vektora magnetne indukcije za $\theta = 0$, duž z -ose torusa. Rezultati mjerenja su prikazani na Sl. 8 zajedno sa rezultatima proračuna pomoću izraza (42). Sa Sl. 8 uočavamo dobro podudaranje rezultata proračuna sa rezultatima eksperimenta.

V. ZAKLJUČAK

U radu je razmatrano magnetno polje jedne faze torusnog induktora sa kružnim poprečnim presjekom. Rješavanjem Laplace-ove jednačine u torusnom koordinatnom sistemu određeni su analitički izrazi za magnetni skalar-potencijal i ortogonalne komponente vektora magnetne indukcije u prostoru izvan torusa. Analizirana je raspodjela amplitude vektora magnetne indukcije duž srednje ose torusa i dat je jednostavan obrazac pogodan za primjenu pri projektovanju. Rezultati proračuna su verifikovani mjerenjima na modelu pravougaonog poprečnog presjeka.

ZAHVALNICA

Autori se ovim putem zahvaljuju prof. dr Momiru Čeliću sa Elektrotehničkog fakulteta Banja Luka na korisnim sugestijama pri rješavanju matematičkih nedoumica koje su se pojavile tokom izrade ovog rada.

LITERATURA

- [1] J.A.Hernandes and A.K.T. Assis, "Electric potential for a resistive toroidal conductor carrying a steady azimuthal current," *Physical Review E*, vol. 68, no. 4, October 2003.
- [2] J.A. Hernandez and A.K.T. Assis, "Surface Charges and External Electric Field in a Toroid Carrying a Steady Current," *Brazilian Journal of Physics*, vol. 34, no. 4, December 2004
- [3] J.A.Hernandes, A.J. Mania, F.R.T Luna and A.K.T. Assis, "The Internal and External Electric Fields for a Resistive Toroidal Conductor Carrying a Steady Poloidal Current," *Physica Scripta*, vol. 78, no. 1, July 2008.
- [4] R.W. Scharstein and H.B. Wilson, "Electrostatic Excitation of a Conducting Toroid: Exact Solution and Thin-Wire Approximation," *Electromagnetics*, vol. 25, no. 1, pp. 1-19, 2005.
- [5] M. Andrews, "Alternative Separation of Laplace's Equation in Toroidal coordinates and its Application to Electrostatics," *Journal of Electrostatics*, vol. 64, pp. 664-672, 2006.
- [6] H. Buchholtz, *Elektrische und Magnetische Potentialfelder*, Berlin: Springer-Verlag, 1957.
- [7] Đ. Lekić and P. Matić, "Design of Tesla's Two-Phase Inductor," in *X International Symposium on Industrial Electronics INDEL 2014*, Banja Luka, November 2014.
- [8] Z. Haznadar, *Teoretska elektrotehnika - Magnetski krug električnog stroja*, Zagreb: Sveučilište u Zagrebu, 1969.
- [9] B. Popović, *Elektromagnetika*, Beograd: Građevinska knjiga, 1990.

ABSTRACT

This paper studies the magnetic field due to one phase of Tesla's two-phase inductor with a toroidal shaped iron core of circular cross-section. The magnetic scalar-potential and components of magnetic flux density outside the toroid are determined by solving Laplace's equation in toroidal coordinates. The results of the calculation are verified by measurements in the laboratory.

MAGNETIC FIELD OF A TOROID INDUCTOR Đorđe Lekić, Petar Matić