

# Numerička rješenja nekih problema u nelinearnoj optici

Vesna Miletic

Student drugog ciklusa studija

Filozofski fakultet

Pale, BiH

vesna.miletic@ffuis.edu.ba

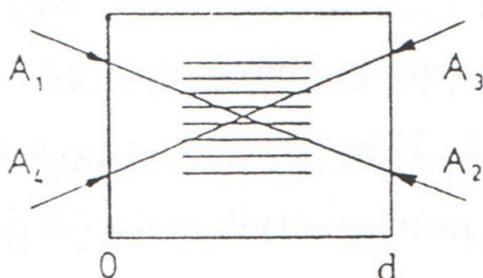
*Sadržaj-* U radu su numerički rješavani i analizirani određeni problemi iz nelinearne optike. Konkretno, analiziran je fotorefraktivni efekat koji je opisan diferencijalnim jednačinama, koje se ne mogu riješiti analitički. Pri tome smo konkretnе fizičke većine uzimali kao funkcije relanih vrijednosti, a zatim kao funkcije kompleksnih vrijednosti. Nakon toga su analizirana dobijena rješenja.

*Ključne riječi- nelinearna optika; fotorefraktivni efekat; numerička rješenja; funkcije relanih vrijednosti; funkcije kompleksnih vrijednosti; aproksimacije.*

## I. UVOD

Fizički procesi se često opisuju diferencijalnim jednačinama, koje je teško riješiti analitički pa tražimo aproksimativna rješenja. Pri rješavanju diferencijalnih jednačina primjenjuju se razne numeričke metode, sa ciljem da se dobiju što tačnija rješenja. Analiziraćemo neke pojave koje su vezane za fotorefraktivni efekat do koga dolazi pri interakciji laserske svjetlosti sa nekim kristalima [1]. Ovaj efekat predstavlja periodičnu promjenu indeksa prelamanja neke optičke sredine pod dejstvom svjetlosti.

U kristalu se dešava poces četvorotalasnog miješanja laserskih zraka (4TM). Kristal se osvjetljava sa tri laserska zraka čije su amplitudne  $A_1$ ,  $A_2$  i  $A_4$ . Kao rezultat nastaje četvrti talas amplitudne  $A_3$  koji se za razliku od poznatog zakona rfleksije svjetlosti u geometrijskoj optici,  $A_3$  vraća se istim putem upadnog zraka  $A_4$  (slika 1).



**Slika 1.** Četvorotalasno miješanje u fotorefraktivnim kristalima

Ovaj proces (4TM) je opisan jednačinama [2]:

$$\frac{dA_1}{dx} = QA_4 - \alpha A_1, \quad \frac{dA_1^*}{dx} = -QA_1^* - \alpha A_4^*, \quad (1)$$

$$\frac{dA_2^*}{dx} = -QA_3^* + \alpha A_2^*, \quad \frac{dA_3}{dx} = QA_2 + \alpha A_3, \quad (2)$$

gdje su:  $A$  - amplitude talasa,  $\alpha$  je koeficijent apsorpcije, a znak "zvjezdica" označava konjugovano kompleksne veličine. Oznaka  $Q$  predstavlja amplitudu transmitivne difrakcione rešetke koja je definisana jednačinom:

$$\tau \frac{dQ}{dt} + \epsilon Q = \frac{\gamma}{I} (A_1 A_4^* + A_2^* A_3), \quad (3)$$

gdje je  $\tau$  vrijeme relaksacije, a  $I$  je ukupni intenzitet talasa, tj.  $I = \sum |A_i|^2$ . Parametri  $\epsilon$  i  $\gamma$  zavise od električnih polja:  $\epsilon = (1 + E_q / E) / (1 + E_M / E)$ , dok je  $\gamma = \Gamma(1 + E_q / E_D) / (1 + E_M / E)$ . Veličine  $E_q, E_D, E_M$  su karakteristična polja u kristalu, a  $E = E_D + iE_0$ , gdje je  $E_0$  vanjsko električno polje [3]. Ako imamo vanjsko električno polje  $E_0$ , tada je  $E$  kompleksan broj a i veličine  $\epsilon$  i  $\gamma$  su predstavljene kao kompleksni brojevi.

Veličina  $\Gamma$  je tzv. parameter skaliranja.

Prethodnu jednačinu (3) teško je riješiti analitički, pa se rješava numeričkim metodama.

U konkretnoj situaciji zanimaju nas veličine na ulaznoj strani kristala ( $x=0$ ) pa uz aproksimacije iz (2) dobijamo rješenja za amplitudu  $A_2$  i  $A_3$ :

$$A_{20} = C_2 e^{(-\alpha d)} \cos \bar{Q}d, \quad A_{30} = -C_2 e^{(-\alpha d)} \sin \bar{Q}d \quad (4)$$

gdje je  $\bar{Q}$  srednja vrijednost amplitude a  $d$  debljina kristala. Radi pojednostavljenja uzimamo da je  $\alpha = 0$ .

## II. RJEŠAVANJE PROBLEMA 4TM POMOĆU FUNKCIJE RELANE PROMJENJIVE

U prvom koraku, potrebno je riješiti diferencijalnu jednačinu (3). Poćićemo od najjednostavnije aproksimacije, tj. u stabilnom stanju iz (3) slijedi iterativno preslikavanje.

$$Q_{n+1} = \frac{\gamma}{\varepsilon I} (A_1 \bar{A}_4 + \bar{A}_2 A_3)_n. \quad (5)$$

Iz (4) i (5) slijedi:

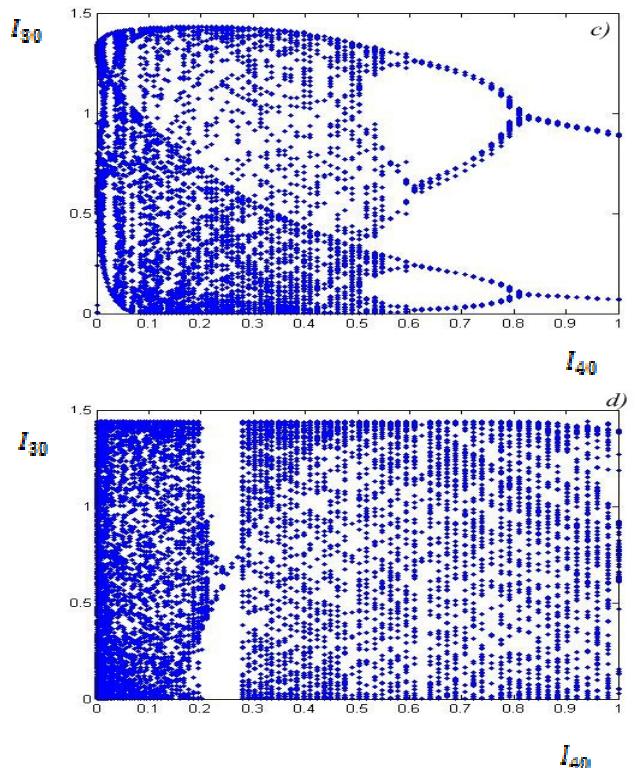
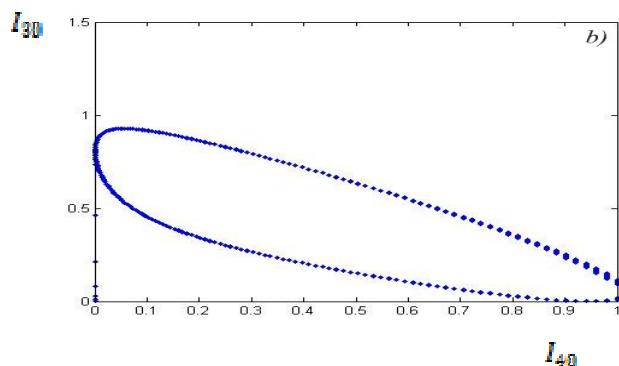
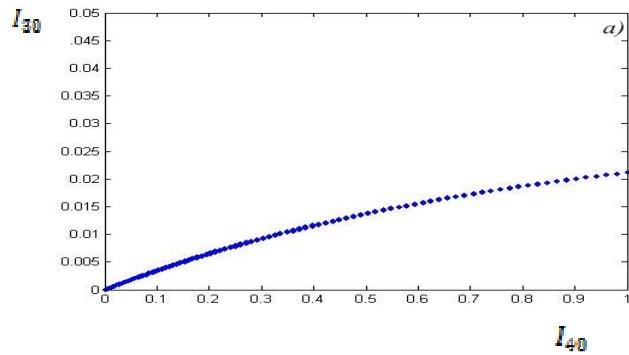
$$Q_{n+1} = \frac{\gamma}{\varepsilon I} \left( C_1 \bar{C}_4 - \frac{|C_2|^2}{2} \sin(2Q_n d) \right), \quad (6)$$

gdje su: oznake  $C_1 = A_1$  i  $C_4 = A_4$  za vrijednosti  $x$  na ulaznoj strani kristala ( $x=0$ ), a  $C_2 = A_2$  za vrijednost  $x$  na izlaznoj strani kristala ( $x=d$ ).

Iz druge jednačine u (4) slijedi:

$$I_{30} = C_2^2 \sin^2 Q_n d. \quad (7)$$

Iz (6) i (7) slijede rješenje na slici 2 na kojima je predstavljena zavisnost reflektovanog zraka  $I_{30}$  u funkciji od upadnog zraka  $I_{40}$  [4] [5] [6]. U ovoj situaciji uzimamo  $\varepsilon = 1$ ,  $C_1 = 0.5$ ,  $C_2 = 1.2$ , dok je  $\gamma$  dato kao parametar, pa slijedi;



Slika 2. Dijagram reflektovanog talasa  $I_{30}$  u funkciji od upadnog zraka  $I_{40}$  za različite vrijednosti  $h$ :

a)  $\gamma=1$ , b)  $\gamma=2$ , c)  $\gamma=3$ , d)  $\gamma=10$ .

Sa prethodne slike zaključujemo kako sa porastom parametra  $\gamma$  rastu nestabilnosti u vrijednosti  $I_{30}$ , koje prelaze u numerički haos (slika 2.d.)

Sljedeće poboljšanje u rješavanju je da se jednačina (3) rješava aproksimativno kao diferencijalna jednačina prvog reda, iz čega slijedi

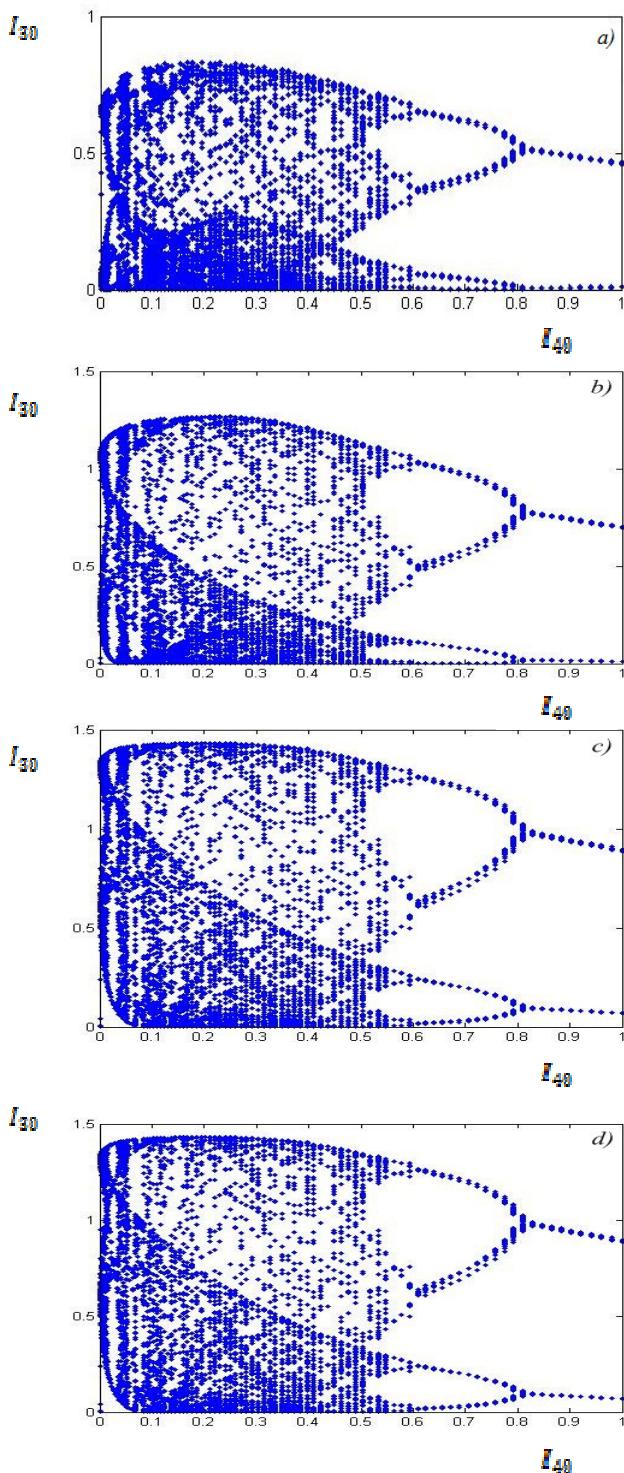
$$Q(t + \Delta t) = \frac{q(t)}{\varepsilon} \left( 1 - e^{(-\varepsilon h)} \right) + e^{(-\varepsilon h)} Q(t) \quad (8)$$

gdje je  $q(t) = \frac{\gamma}{I} (A_1 A_4^* + A_2^* A_3)$ , a  $h$  je diskretizacioni parameter, tj.  $h = \Delta t / \tau$ .

Iz prethodne jednačine, može se formirati preslikavanje:

$$Q_{n+1} = q_n \left( 1 - e^{(-\varepsilon h)} \right) + e^{(-\varepsilon h)} Q_n \quad (9)$$

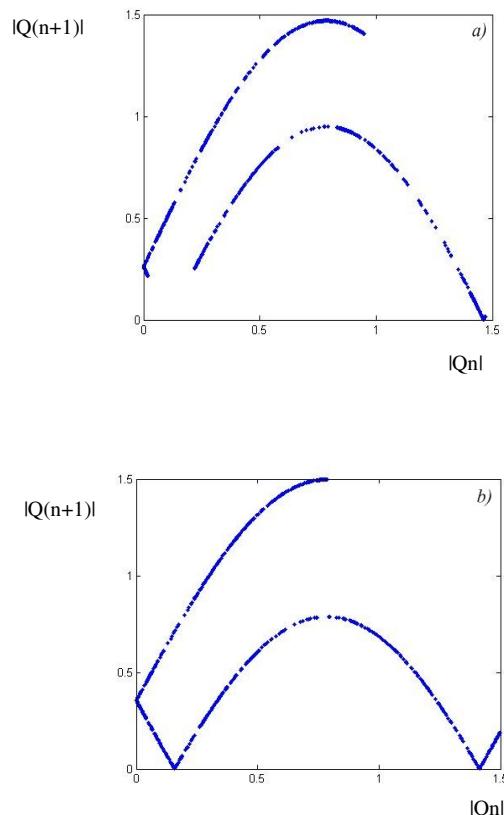
Rješenja iz (9) i (7) data su na slici 3. Na slici je, prikazana zavisnost reflektovanog talasa  $I_{30}$  u funkciji od upadnog signala  $I_{40}$ . Uzećemo fiksne parametre  $\varepsilon = 1$  i  $\gamma = 3$ , dok parameter  $h$  mijenjamo:



**Slika 3.** Dijagram reflektovanog talasa  $I_{30}$  u funkciji od upadnog zraka  $I_{40}$  za različite vrijednosti  $h$ :  
a)  $h=1$ , b)  $h=2$ , c)  $h=10$ , d)  $h \rightarrow \infty$ .

Kada  $h \rightarrow 1$ , rješenja su tačnija ali i sada se pojavljuju numeričke nestabilnosti. Sa porastom  $h$  ( $h=10$  i veće) grafik je identičan grafiku slike 2c.

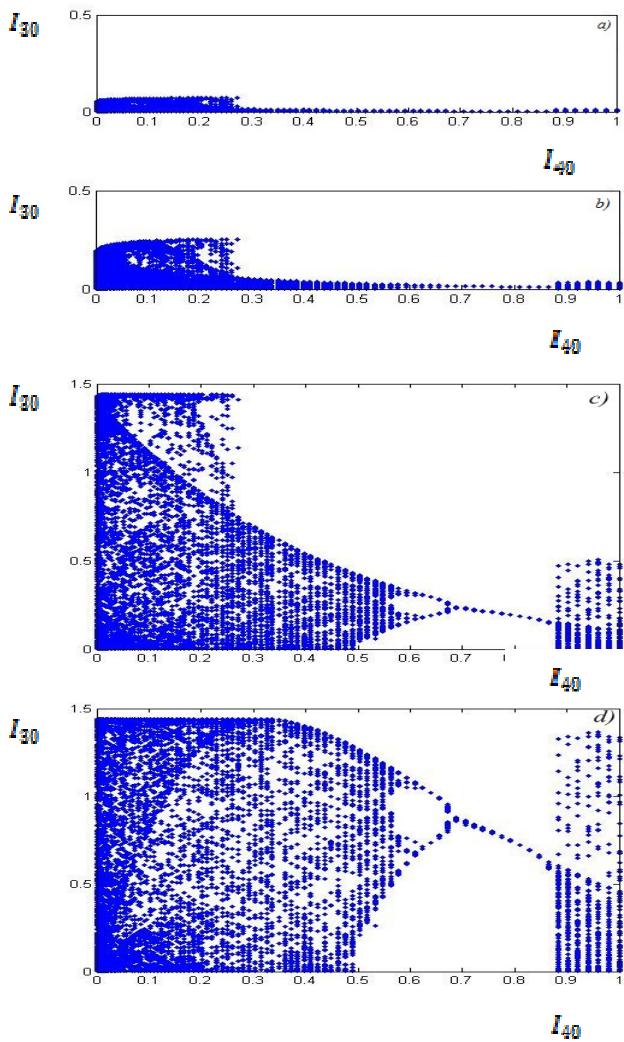
Na slici 4 predstavljamo zavisnost  $|Q_{n+1}|$  od  $|Q_n|$ , što predstavlja tkz. Prvi odziv preslikavanja. Oblik grafika sugerira da je formiran periodičnom funkcijom koja se pojavljuje u izrazima (6) i (7).



**Slika 4.** Zavisnost  $|Q_{n+1}|$  od  $|Q_n|$ :  
a)  $\gamma = 3$ ,  $h \rightarrow \infty$ ,  $I_{40}=0,09$  i  $I_{40}=0,2$

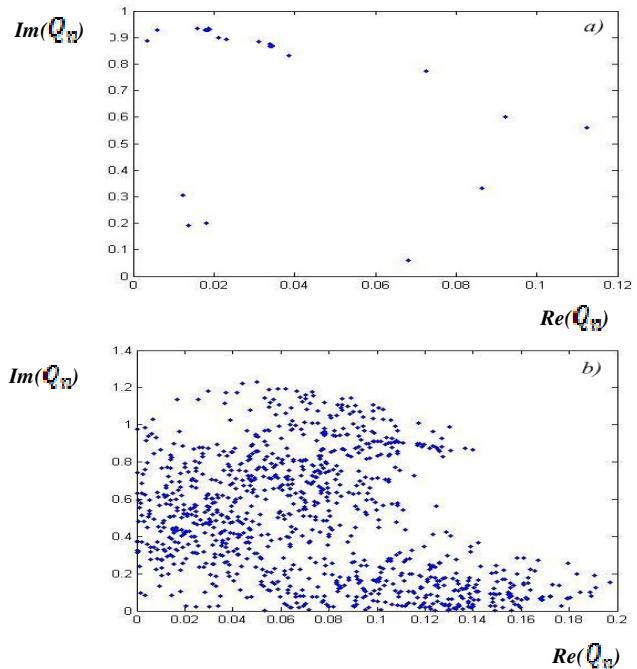
### III. RJEŠAVANJE PROBLEMA 4TM POMOĆU FUNKCIJE KOMPLEKSNE PROMJENJIVE

Predhodni rezultati bili su za relane vrijednosti parametara. Interesuje nas sta se desava za kompleksne vrijednosti, tj. kada je prisutno vanjsko polje  $E_0$ . U narednoj situaciji veličina  $\Gamma$  je kompleksan broj:  $\Gamma(-2,5 - 2,36) \text{ (cm}^{-1})$ . Parametri  $\epsilon$  i  $\gamma$  su takođe, kompleksni brojevi. U rješenjima opet dobijamo numeričke nestabilnosti. Na slici 5 data su rješenja iz (9) i (7) za navedenu vrijednost  $\Gamma$ .



**Slika 5.** Dijagram reflektovanog talasa  $I_{30}$  u funkciji od upadnog zraka  $I_{40}$  za različite vrijednosti  $h$ :  
a)  $h=1$ , b)  $h=2$ , c)  $h=10$ , d)  $h=1000$ .

Na slici 6 predstavljen je primjer tzv. haotizacije koje se odnose na grafik na slici 5c.



**Slika 6.** Zavisnost imaginarnog  $Q_n$  od realnog  $Q_n$

- a)  $I_{40} = 0.65$ ,  $h = 10$
- b)  $I_{40} = 0.31$ ,  $h = 10$

## ZAKLJUČAK

U radu su numerički rješavani i analizirani određeni problemi iz nelinearne optike tj. fotorefraktivni efekat koji je opisan diferencijalnim jednačinama, koje se ne mogu riješiti analitički. Pri tome smo konkretnе fizičke veličine uzimali kao funkcije realnih vrijednosti, a zatim kao funkcije kompleksnih vrijednosti. Primjenjena su dvije aproksimacije i obje su dale tkz. Numeričke nestabilnosti u rješenjima. Ove nestabilnosti i numerički haos su posljedica neadekvatnih metoda jer ih eksperiment ne potvrđuje.

## ZAHVALNICA

Posebnu zahvalnost dugujem profesoru Zoranu Ljuboji sa Elektrotehničkog fakulteta, Univerziteta u Istočnom Sarajevu. Mentor na izradi završnog rada drugog ciklusa pod naslovom "Numeričko rjesavanje nekih problema kod fotorefraktivnog efekta".

## LITERATURA

- [1] P. Gunter and J.P. Huignard (eds), *Photorefractive Materials and Their Applications*, I and II (Springer, Berlin, 1988, 1989)
- [2] W. Krolikowski, K. D. Shaw, M.Cronin-Golomb and A. Bledowski, J. Opt.Soc.Am.B 6 (1989); W. Krolikowski, M.R. Belić, M.Cronin-Golomb and A. Bledowski, J. Opt.Soc.Am.B 7 (1990).
- [3] N. V. Kukhtarev, V. Markov and S. Odulov, "Transient energy transfer during hologram formation in LiNbO<sub>3</sub> in external electric field", Opt. Commun. 23 338 (1977).
- [4] M. Belić and Z. Ljuboje, "Chaos in phase conjugation: physical vs numerical instabilities", Opt. Quant. Electron. 24 745 (1992)
- [5] M. Belić, Z. Ljuboje, M. Sauer and F. Kaiser, "Computational chaos in nonlinear optics", Appl. Phys. B 55, 109 (1992).
- [6] Z. Ljuboje, "Numerički haos pri rješavanju nekih problema kod fotorefraktivnog efekta ", INFOTEH 2014.

## ABSTRACT

Certain problems from nonlinear optics have been solved and analysed in the paper. More precisely, a photorefractive effect has been analysed, described by differential equations which cannot be solved analytically. In that, the concrete physical units have been taken as the functions of real values, and then as the functions of complex values. After that, the obtained solutions have been analysed.

## NUMERICAL SOLUTIONS OF SOME PROBLEMS IN NONLINEAR OPTICS

Vesna Miletic