INFOTEH-JAHORINA Vol. 14, March 2015.

Primena dekompozicije matrice na singularne vrednosti (SVD) u oblasti kompresije digitalne slike

Hana Stefanović, Svetlana Štrbac-Savić
Računarska tehnika
Visoka škola elektrotehnike i računarstva
Beograd, Srbija
stefanovic.hana@yahoo.com, svetalanas@viser.edu.rs,

Dejan Milić, Zorica Nikolić
Telekomunikacije
Elektronski fakultet
Niš, Srbija
dejan.milic@elfak.ni.ac.rs, zorica.nikolic@elfak.ni.ac.rs

Sadržaj—**U radu je prvo izložen algoritam dekompozicije matrice na singularne vrednosti (SVD –** ***Singular Value Decomposition*****), kao jedan od često korišćenih postupaka za dekomponovanje matrica u matrice karakterističnih korena i vektora. Zatim je ovaj postupak primenjen u cilju postizanja željenog stepena kompresije digitalne slike, prikazane u odgovarajućoj matričnoj formi, sa osnovnom idejom da se originalna matrica prikaže upotrebom matrica manjih dimenzija. Konkretni primeri koji ilustruju postizanje određenog stepena kompresije, uz poređenje sa originalnom nekompresovanom slikom, rađeni su u MATLAB programskom okruženju, dok su kao numerički pokazatelji kvaliteta komprimovane slike, korišćeni srednja kvadratna greška (MSE –** ***Mean-Square Error*****) i vršni odnos signal-šum (PSNR –** ***Peak Signal-to-Noise Ratio*****).**

Ključne reči-kompresija digitalne slike; dekompozicija matrice na singularne vrednosti (SVD); stepen kompresije

I. UVOD

Veliki porast produkcije multimedijalnih podataka implicira stalni razvoj i dalju optimizaciju različitih algoritama kompresije [1], [2]. U ovom radu izložen je koncept dekompozicije matrice na singularne vrednosti [3], u cilju redukcije dimenzionalnosti digitalne slike. Digitalna slika se uobičajeno predstavlja pravougaonom matricom elemenata slike – piksela, pri čemu je svaki piksel opisan određenim brojem komponenti prezentovanih odgovarajućim brojem bitova [1]. Različiti sistemi za obradu i prikaz slike koriste vrednosti piksela uglavnom proporcionalne luminiscenciji (intenzitetu svetlosti) ili nelinearno povezane sa luminiscencijim [2], prema preporukama Međunarodne komisije za standardizaciju CIE (Commission Internationale de l'Eclairage). Vizuelni doživljaj, odnosno perceprija i reprodukcija slike u boji vrši se na osnovu tri komponente boje (*RGB* model), čije su amplitude srazmerne njihovim intenzitetima, dok je njihovi spektralni sadržaj izabran respektujući osnovne principe procesa viđenja I prenosa signala u ljudskom vizuelnom sistemu. RGB model formiran je u skladu sa principima konverzije svetlosnih nadražaja u električne impulse u fotoreceprorskom sloju ljudskog vida, od čega je jedna vrsta receptora osetljiva na intenzitet svetlosti (luminiscencija), a druga na boju (hrominiscencija). Rezutati mnogobrojnih istraživanja u kolorimetriji pokazali su da se većina boja može dobiti aditivnim mešanjem određenih količina izabranih primarnih boja (primara – *RGB*), ali takođe postoje i neke boje koje se ne mogu dobiti ovim načinom [2]. Zbog toga se, po preporuci CIE, umesto tri monohromatske realne primarne boje koriste tri imaginarne primarne boje. U praktičnoj primeni koristi se nelinerna gama korekcija za svaku komponentu, a tek nakon toga se formira težinska suma tri nove komponente (*R'B'G'*) u cilju formiranja komponente koja predstavlja luminiscenciju, što je definisano odgovarajućim preporukama. U praksi se najčešće koristi transformacija predviđena za digitalnu televiziju *RGB* →*YCbCr*, a nešto ređe *RGB*→*YIQ* i *RGB*→*YUV*. Ove tri transformacije pogodne su za kompresiju slike u boji [1] zato što je spektar hrominentnih komponenti znatno uži. Komponente *Y*, *Cb* i *Cr* se mogu komprimovati kao nezavisne mohoromatske slike, pa su iz razloga jednostavnosti, a bez gubitka opštosti, u radu su analizirane monohromatske slike.

U oblasti digitalne obrade slike, kao i digitalne obrade signala uopšte, mogućnosti primene MATLAB-a su vrlo velike. Analiza postupaka, procena vremena potrebnog za obradu, kao i veliki broj ugrađenih funkcija, vrlo su značajni za razvoj novih i poboljšanje i optimizaciju postojećih algoritama u oblasti digitalne obrade multimedijalnih podataka. Nekoliko ilustrativnih primera izloženih u radu predstavlja praktičnu primenu jednog od poznatih i često korišćenih algoritama za dekomponovanje matrice u cilju prikazivanja digitalne slike sa redukovanom dimenzionalnošću. Osnovni koncept SVD (*Singular Value Decomposition*) algoritma zasnovan je na principima smanjenja dimenzionalnosti dekompozicijom na singularne vrednosti [3]-[6], u cilju povećanja stepena kompresije slike [7], [8]. SVD algoritam omogućava jednostavnu strategiju aproksimacije originalne matrice kojom je predstavljena digitalna slika [9], [10], koristeći matrice manjih dimenzija. Nakon sortiranja singularnih vrednosti u opadajućem poretku, moguće je zadržati prvih k najvećih, a ostale postaviti na nulu. Rezultat je nova matrica, ranga k, koja je, a u zavisnosti od vrednosti k, dobra aproksimacija originalne matrice, u smislu najmanjih kvadrata [11], [12]. Primeri ilustrovani u radu rezultat su međusobne saradnje na predmetima Digitalne multimedije i Algoritmi i strukture podataka, koji se drže na Visokoj školi elektrotehnike i računarstva u Beogradu, a na kojima su autori angažovani, sa idejom da se prikaže da je implementirani algoritam dosta jednostavan, a ne zahteva poznavanje složenijih transformacija, kao što je brza Furijeova transformacija (FFT – *Fast Fourier Transform*) ili diskretna kosinusna transformacija (DCT – *Discrete Cosine Transform*), koju koristi JPEG standard za kompresiju slike.

II. Postupak SVD dekompozicije

U cilju opisa SVD algoritma prvo su navedeni neki osnovni pojmovi, definicije i teoreme, dostupne u većini standardnih udžbenika iz algebre i numeričke analize.

Iz teorije algebre poznato je da nenulti vektor $\boldsymbol{x}$ koji se linearnom transformacijom sa matricom $\boldsymbol{A}$ transformiše u sebi kolinearan vektor $\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}$, predstavlja svojstveni, sopstveni ili karakteristični vektor matrice $\boldsymbol{A}$, dok skalar λ predstavlja svojstvenu, sopstvenu ili karakterističnu vrednost matrice $\boldsymbol{A}$. Svojstveni vektori predstavljaju rešenja homogenog sistema linearnih jednačina sa matricom sistema $\boldsymbol{A}$-$\lambda\boldsymbol{I}$, pri čemu det($\boldsymbol{A}$-$\lambda\boldsymbol{I}$) predstavlja karakteristični polinom matrice $\boldsymbol{A}$ [11], [12].

Teorema: (SVD) Neka su m i n ($m\geq n$) prirodni brojevi, i neka je $\boldsymbol{A}$ proizvoljna m x n realna matrica. Tada postoji dekompozicija $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U\Sigma V}^{\mathrm{T}}$, gde je $\boldsymbol{U}$ ortonormalna m x n matrica i $\boldsymbol{V}$ ortogonalna n x n matrica, dok je $\boldsymbol{\Sigma}$=diag(σ_1, σ_2,..., σ_n), pri čemu je $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... \sigma_n \geq 0$.

Definicija: Kolone matrice $\boldsymbol{U}$=[u_1, u_2,..., u_n] nazivaju se levi singularni vektori, dok se kolone matrice $\boldsymbol{V}$=[v_1, v_2,..., v_n] nazivaju desni singularni vektori, dok brojevi σ_1, σ_2,..., σ_n predstavljaju singularne vrednosti.

Na osnovu izloženog matrica $\boldsymbol{A}$ se može prikazati kao:

$$A = U\Sigma V^T = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i u_i v_i^T \tag{1}$$

pri čemu matrice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{\Sigma}$ i $\boldsymbol{V}$ podrazumevano moraju biti istog ranga [11], [12]. SVD algoritam predstavlja relativno jednostavnu strategiju optimalne aproksimacije matrice matricama manjih dimenzija. Pošto su elementi matrice $\boldsymbol{\Sigma}$ (singularne vrednosti) sortirane u opadajućem poretku, moguće je zadržati prvih k najvećih vrednosti, a ostale postaviti na nulu. Proizvod dobijenih matrica je u tom slučaju nova matrica $\boldsymbol{A_k}$, ranga k, koja je dobra aproksimacija matrice $\boldsymbol{A}$.

Može se pokazati da je nova matrica $\boldsymbol{A_k}$ matrica ranga k koja je u smislu najmanjih kvadrata najbliža matrici $\boldsymbol{A}$ [11], [12]. Matrica $\boldsymbol{\Sigma}$ može se pojednostaviti brisanjem vrsta i kolona koje su postavljene na nulu, čime se dobija matrica $\boldsymbol{\Sigma_k}$.

Ako se obrišu odgovarajuće kolone matrica $\boldsymbol{U}$ i $\boldsymbol{V}$ dobijaju se matrice $\boldsymbol{U_k}$ i $\boldsymbol{V_k}$, dok rezultujuća matrica određena sa:

$$A_k = U_k \Sigma_k V_k^T = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^T \tag{2}$$

predstavlja najbolju moguću aproksimaciju matrice $\boldsymbol{A}$ ranga k, u smislu najmanjih kvadrata [11], [12].

U radu su korišćene numeričke metode određivanja svojstvenih vrednosti, koje se generalno mogu podeliti u dve klase: metode generisanja karakterističnog polinoma i nalaženja njegovoh korena i iterativne metode bez prethodnog formiranja karakterističnog polinoma. Svi numerički proračuni rađeni su u programskom opkruženju MATLAB.

III. Primena SVD algoritma u MATLAB programskom okruženju

U MATLAB programskom okruženju, generisana je matrica $\boldsymbol{A}$, čije su dimenzije konkretno 4 x 4, u cilju ekonomičnosti prikaza rezultata, i čiji su elementi slučajni brojevi sa uniformnom raspodelom u intervalu (0, 10), a koji su dobijeni nakon izvršenja sledećeg koda:

```
>> A=randint(4,4,10)

A =

   9   8   8   9

   2   7   4   7

   6   4   6   1

   4   0   7   4
```

Nakon toga izvršena je SVD dekompozicija, koristeći:

```
>> [U,S,V]=svd(A)

U =

  -0.7447  -0.0971  -0.1074  -0.6515

  -0.4345  -0.6771   0.1662   0.5702

  -0.3748   0.4727  -0.6482   0.4648

  -0.3409   0.5555   0.7354   0.1856

S =

  22.7848        0        0        0

        0   6.3382        0        0

        0        0   3.8822        0

        0        0        0   1.8996

V =

  -0.4908   0.4465  -0.4074  -0.6275

  -0.4607  -0.5721  -0.5895   0.3360

  -0.5412   0.5111   0.2741   0.6089

  -0.5039  -0.4606   0.6414  -0.3500
```

U cilju primene ovog algoritma prilikom postizanja željenog stepena kompresije slike, dimenzije matrica kojima su prezentovane digitalne slike, mnogo su veće, u konretnom slučaju 256 x 256. Korišćena je slika cameraman.tif, jedna od često korišćenih MATLAB-ovih slika.

IV. Primena SVD algoritma u MATLAB programskom okruženju

U cilju ilustracije primene SVD algoritma, analizirana je slika cameraman.tif, predstavljena matricom ranga 253. Rezultati vršenja SVD dekompozicije nad matricom originalne slike prikazane na Sl.1, a nakon izbora odgovarajuće vrednosti parametra k kojim je određen rang nove matrica $\boldsymbol{A_k}$ kojom je predstavljena kompresovana slika, ilustrovani su na Sl.2, Sl.3, Sl.4 i Sl.5, za slučaj k=20, 30, 50 i 80, respektivno, uz zaključak da kvalitet kompresovane slike raste sa porastom k.

Slika 1. Originalna (nekompresovana) slika

Slika 2. Kompresovana slika, za slučaj k=20

Slika 3. Kompresovana slika, za slučaj k=30

Slika 4. Kompresovana slika, za slučaj k=50

Slika 5. Kompresovana slika, za slučaj k=80

Osim subjektivne vizuelne ocene kvaliteta digitalne slike, ilustoravane prethodnim primerima, urađena je i procena numeričkih pokazatelja kvaliteta kompresovane slike, kao što su srednja kvadratna greška (MSE – *Mean-Square Error*) i vršni odnos signal-šum (PSNR – *Peak Signal-to-Noise Ratio*).

Za slike $x(n_1, n_2)$ i $y(n_1, n_2)$ dimenzija N_1 x N_2, MSE se određuje kao [1]:

$$MSE = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{n_1=1}^{N_1} \sum_{n_2=1}^{N_2} \left[x(n_1, n_2) - y(n_1, n_2) \right]^2 \qquad (3)$$

dok je PSNR određen sa:

$$PSNR = 10 \log_{10} \left(\frac{MAX_I}{MSE} \right) \qquad (4)$$

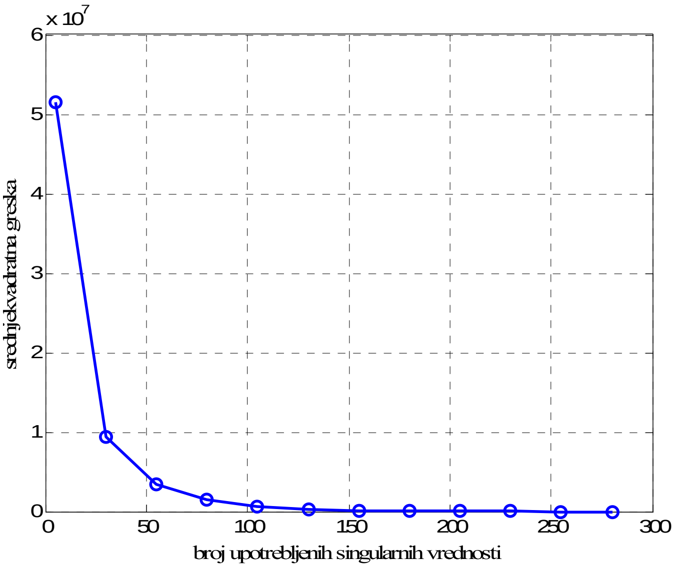
pri čemu MAX_I predstavlja najveću moguću vrednost piksela, koja u slučaju osmobitne sivo-skalirane slike iznosi 255.

U Tabeli 1. dat je prikaz vrednosti ovih numeričkih pokazatelja, dobijenih na osnovu jednačina (3) i (4), za različite vrednosti parametra k, sa zaključkom da porast vrednosti parametra k rezultuje slikom boljeg kvaliteta, što je u skladu sa subjektivnom vizuelnom procenom slike, ilustrovanom na Sl.2, Sl.3, Sl.4 i Sl.5.

TABELA I. VREDNOST NUMERIČKIH POKAZATELJA KVALITETA

Vrednost *k*	**Numerički pokazatelji kvaliteta**	
	MSE	***PSNR [dB]***
20	0.00360	24.44
30	0.00220	26.58
50	0.00098	30.11
80	0.00035	34.62

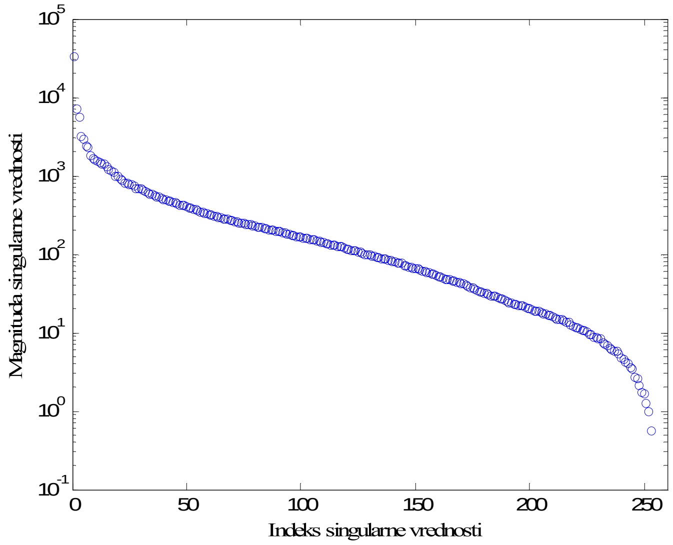
Na osnovu prezentovanih rezultata može se zaljučiti da povećanje vrednosti parametra k rezultuje slikom boljeg kvaliteta, ali je takođe potrebno i više memorijsog prostora ili kapaciteta komunikacionog kanala, za skladištenje, arhiviranje ili slanje ovakve slike. Trend opadanja srednje kvadratne greške, sa povećanjem broja singularnih vrednosti koje su uključene u proces određivanja matrice kompresovane slike $\boldsymbol{A_k}$, prikazan je na Sl. 6.



Slika 6. Zavisnost srednje kvadratne greške od broja upotrebljenih singularnih vrednosti

Na osnovu rezultata prikazanih na Sl.6 može se zaključiti da je upotrebom oko 100 singularnih vrednosti, pri čemu je rang ekvivalentne matrice takođe 100, vrednost MSE na prihvatljivo niskom nivou.

U cilju prikaza dominantnosti prvih k komponenti iz skupa svih singularnih vrednosti, sortiranih u opadajućem poretku u skladu sa definiciojom SVD, urađen je proračun zavisnosti magnitude singularne vrednosti u zavisnosti od pozicije singularne vrednosti u pomenutom opadajućem nizu. Rezultati su ilustrovani na Sl.7, koja predstavlja spektar singularnih vrednosti, u logaritamskoj skali. Na osnovu prikazanih rezultata može sa zaključiti da vrednost (značajnost) singularnih komponenti drastično opada sa porastom rednog pokazatelja pozicije konkretne singularne vrednosti u nizu, formiranom u skladu sa definicijom SVD.



Slika 7. Zavisnost magnitude singularnih vrednosti od rednog pokazatelja pozicije (indeksa) singularne vrednosti u nizu

Postizanje većeg stepena kompresije opisanim algoritmom, koje je ostvareno na račun degradicije kvaliteta slike, moguće je izvršiti jednostavnim izborom vrednosti parametra k od strane korisnika.

Stepen kompresije γ može se odrediti na osnovu:

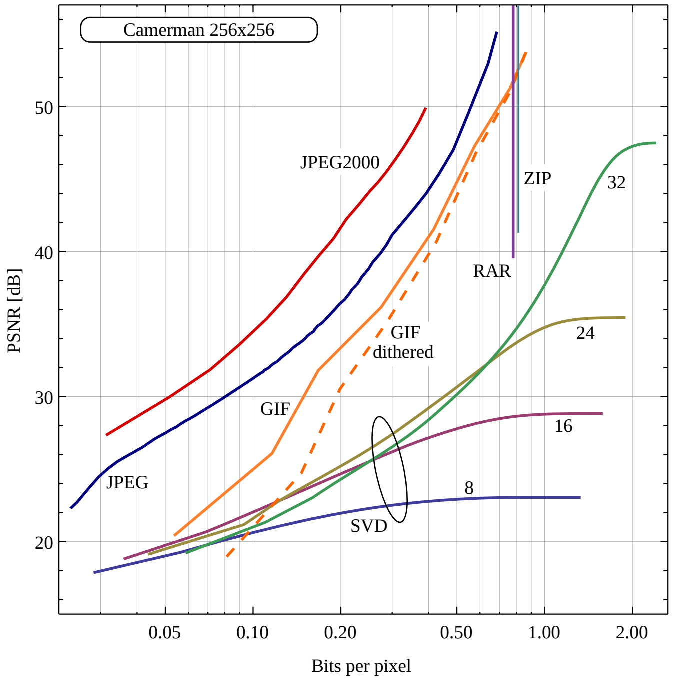
$$\gamma = \frac{N_k}{N} \times 100 \tag{5}$$

pri čemu su dimenzije originalne nekompresovane slike cameraman.tif određene sa: N=256 x 256, dok su dimenzije kompresovane slike određene sa: $N_k=k(256+256+1)=513 \cdot k$. Vrednost N_k određena je respektujući jednačinu (2), obzirom da svaka od u_i komponenti sadrži 256 elemenata, svaka od v_i komponenti takođe sadrži 256 elemenata, dok je σ_i skalar, za i=1,...,k.

Primena jednačine (5), za konkretne prethodno razmatrane vrednosti parametra k, u opsegu od 20 do 80, rezultuje povećanjem stepena kompresije γ, kao što je prikazuju i rezultati dati u Tabeli 2.

TABELA II. VREDNOST STEPENA KOMPRESIJE

Vrednost *k*	**Vrednost stepena kompresije γ [%]**
20	15.65
30	23.48
50	39.14
80	62.62



Slika 8. Zavisnost vršnog odnosa signal-izobličenje od srednjeg broja bitova po pikselu, za različite tehnike kompresije

V. Poređenje performansi

Da bi se izvršilo poređenje performansi kompresije zasnovane na SV dekompoziciji sa postojećim standardima, potrebno je detaljnije razmotriti format zapisa podataka, što donekle prevazilazi cilj razmatranja ovog rada. U grubim crtama, pomenućemo da je za zapis matrica ***U*** i ***V*** potrebno koristiti standardne označene celobrojne tipove podataka, što sa svoje strane nameće kvantizaciju koeficijenata. Sa druge strane, singularne vrednosti su pozitivne tako da je za njihov zapis moguće koristiti standardne neoznačene celobrojne tipove podataka, uz dodatne kvantizacione efekte. Kvantizacioni efekti dovode do degradiranja performansi, tako da će uz aritmetiku konačne tačnosti vršni odnos signal-izobličenje biti manji od teorijskih predviđanja.

Pored praktičnih aspekata formata zapisa podataka i kvantizacije koeficijenata, neophodno je razmotriti i mogućnost smanjenja redundanse u zapisu korišćenjem algoritama za kompresiju, što takođe prevazilazi opseg razmatranja ovog rada. Uz uzimanje u obzir pomenutih efekata i tehnika, performanse SV dekompozicije su prikazane na Sl.8, u poređenju sa prihvaćenim standardima za kompresiju slike. Preciznost artimetike (u broju bitova) koja je korišćena je označena pored svake krive koja se odnosi na SVD.

U najširem smislu se može zaključiti da PSNR kao mera kvaliteta ne odražava subjektivnu percepciju kvaliteta, kao i da čista SVD kompresija ima slabije performanse u odnosu na JPEG kompresiju. Međutim, s obzirom na manju kompleksnost, SVD ima potencijala za primenu prilikom kompresije delova slike unutar drugih algoritama.

Zaključak

Praktična implementacija SVD algoritma ilustrovana u ovom radu, omogućava korisniku da nakon nekoliko iteracija, uz prihvatljivu računsku složenost, postigne željeni stepen kompresije, uz prikaz odgovarajućih vizuelnih i numeričkih pokazatelja kvaliteta kompresovane slike. Izbor vrednosti ranga matrice, kojom se nakon primene SVD algoritma vrši predstavljanje matrice originalne slike, je kompromis između postizanja određenog željenog stepena kompresije i zadržavanja prihvatljivog kvaliteta digitalne slike.

Literatura

[1] M. Popovic, Digitalna obrade slike, Akademska misao, Beograd, 2006.

[2] M. Dukic, Principi telekomunikacija, Akademska misao, Beograd, 2008.

[3] A. Ranade, S. S. Mahabalaran, S. Kale, “A variation on SVD based image compression”, Image and Vision Computing J. vol. 25, issue 6, June 2007, pp. 771-777.

[4] O. Bryt, M. Elad, “Compression of facial images using the K-SVD algorithm”, J. Vis. Commun. Image R., vol. 19, 2008, pp. 270–282.

[5] M. Aharon, M. Elad, A. Bruckstein, “K-SVD: An Algorithm for Designing Overcomplete Dictionaries for Sparse Representation”, IEEE Trans. on Signal Processing, vol. 54, no. 11, 2006, pp. 4311-4322.

[6] R. Liu, T. Tan, “A SVD-Based Watermarking Scheme for Protecting Rightful Ownership,” IEEE Trans. on Multimedia, vol. 4(1), March 2002, pp.121- 128.

[7] N. Garguir, “Comparative Performance of SVD and Adaptive Cosine Transform in Coding Images,” IEEE Trans. on Communications, vol. 27(8), August 1979, pp. 1230-1234.

[8] E. F. Deprettere (editor), SVD and signal processing: algorithms, applications and architectures, Elsevier Science Publishers, North-Holland, Amsterdam, 1988.

[9] L. De Lathauwer, B. De Moor, J. Vandewalle, “A Multilinear Singular Value Decomposition”, SIAM J. on Matrix Analysis and Applications, 2000, vol. 21, no. 4, pp. 1253-1278.

[10] R. Sun, H. Sun, T. Yao, “A SVD- and quantization based semi-fragile watermarking technique for image authentication”, Int. Conf. on Signal processing, vol. 2, 2002, pp. 1592 – 1595.

[11] W. Keith Nicholson, Linear algebra with applications, 4th ed., Toronto: McGraw-Hill Ryerson, 2002.

[12] G. H. Golub, C. F. Van Loan, Matrix Computations, 3rd ed., Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, 1996.

Abstract

This paper illustrates an application of Singular Value Decomposition (SVD) algorithm in digital image compression. An image can be represented by *m* x *n* matrix whose (*i*, *j*)th entry corresponds to the brightness of the pixel (*i*, *j*). The idea is to compress the image represented by a very large matrix to the one which corresponds to a lower-order approximation of original matrix, but whose quality is still acceptable to a user. The impact of lower-order approximation matrix rank on reproduction quality is contributed, and its impact on compression ratio is also given. Some numerical performance measures, like Mean-Square Error (MSE) and Peak Signal-to-Noise Ratio (PSNR) are calculated, while the spectrum of singular values is also presented, showing only a few very strong entries.

SOME PRACTICAL APPLICATIONS OF SVD ALGORITHM IN DIGITAL IMAGE COMPESSION

Hana Stefanovic, Svetlana Strbac-Savic, Dejan Milic, Zorica Nikolic