

# Primena Polya parametarskog konvolucionog jezgra kod procene fundamentalne frekvencije u spektralnom domenu

Zoran Milivojević, Nataša Savić

Studijski program Komunikacione tehnologije  
Visoka tehnička škola strukovnih studija  
Niš, Srbija

zoran.milivojevic@vtsnis.edu.rs, natasa.savic@vtsnis.edu.rs

Darko Brodić

Department za menadžment  
Tehnički fakultet u Boru, Univerzitet u Beogradu  
Bor, Srbija  
dbrodic@tf.bor.ac.rs

*Sadržaj*—U prvom delu rada analizirane su pozitivno definitne i Polya frekventne funkcije na osnovu kojih je konstruisano Polya parametarsko interpolaciono jezgro. U drugom delu rada prikazani su grafički i tabelarno rezultati primene Polya parametarskog konvolucionog jezgra kod procene fundamentalne frekvencije signala. Na osnovu srednje kvadratne greške određeni su optimalni parametri jezgra za neke klasične, vremenski simetrične prozorske funkcije. Na kraju je izvršena komparativna analiza sa rezultatima procene fundamentalne frekvencije u odnosu na rezultate dobijene primenom algoritama sa Keysovom jedno-parametarskim, kvadratnim, Polya kvazi-racionalnim i Polya racionalnim parametarskim interpolacionim jezgrima.

*Ključne riječi*—Polya frekventne funkcije; Interpolaciono jezgro; Fundamentalna frekvencija;

## I. UVOD

Prilikom obrade podataka često se javlja potreba za procenom nekih vrednosti. Rezultati merenja uglavnom su izraženi na diskretnom skupu tačaka. Na osnovu tih podataka procenjuje se međuvrednosti, odnosno data diskretna funkcija zamenjuje se neprekidnom funkcijom na tom skupu ili na još širem skupu. Ovaj postupak naziva se interpolacija (ekstrapolacija na širem skupu), a neprekidna funkcija naziva se interpolaciona funkcija. Kao interpolacione funkcije se koriste polinomi, segment polinomi (**eng.** *piecewise polynomials*), racionalne funkcije, eksponencijalne i trigonometrijske funkcije. Interpolacija polinomima je najjednostavnija, međutim za nizove dužine  $N > 10$  nije praktično primeniti polinom, jer je interpolacioni polinom reda  $N \geq 10$ , te je vreme izvršavanja duže. Kako bi se povećala brzina izračunavanja u praksi se najčešće koristi konvolucionna interpolacija polinomima trećeg reda (kubne konvolucione funkcije odnosno konvolucionna jezgra). Brzina izvršavanja interpolacionih algoritama i njihova numerička preciznost direktno su povezani sa izborom interpolacionog jezgra. Za potrebe konvolucione interpolacije razvijeno je mnogo interpolacionih jezgara. Počev od jezgra drugog reda (**eng.** *quadratic kernel*) [1], [2], preko trećeg reda (**eng.** *cubic kernel*) i na dalje [3], [4] Uvode se parametarska konvolucionna jezgra, jer omogućavaju primenu kod različitih problema izborom optimalnog parametra [5]-[7]. U literaturi su posebno obrađena jezgra trećeg reda bazirana na Keysovom interpolacionom jez-

gru [8]. Zbog toga su, jezgra koja su izvedena iz predloženo parametarskog kubnog jezgra, nazvana Keysovim jezgrima. Pored njih, za potrebe obrade slike zapaženu ulogu imaju Grevilleova jezgra [3], [9]. Kod diskretnih električnih signala često se javlja potreba za interpolacijom u realnom vremenu (gubitak sempla, promena frekvencije odmeravanja, itd.). Posebno su aktuelni problemi procene parametara kao što su frekvencija i faza, gde je neophodno vršiti interpolaciju.

Potreba za interpolacijom javlja se i pri analizi rasutih podataka. Analiza rasutih podataka može se obavljati pomoću radialno baznih funkcija (**eng.** *Radial basis function, RBF*) [10]-[16]. U svojim radovima [13]-[15] Bochner i Schoenberg su dokazali značajne teoreme na osnovu kojih su izvedeni izrazi za interpolaciona jezgra koja su pogodna za interpolaciju rasutih podataka. U radu [16] prikazana su interpolaciona jezgra dobijena na osnovu Polya frekventnih funkcija.

U ovom radu izvršna je konstrukcija parametarskog konvolucionog interpolacionog jezgra baziranog na Polya frekventnim funkcijama. Primenom Polya parametarskog konvolucionog jezgra vršena je procena fundamentalne frekvencije sinusoidalnog test signala u spektralnom domenu. Signal je najpre primenom diskretne Furijeove transformacije (**eng.** *Discrete Fourier Transforms, DFT*) iz vremenskog preveden u spektralni domen. Primenom DFT-a vrši se izračunavanje spektra u diskretnim tačkama (frekvencijama), tako da se procena fundamentalne frekvencije vrši konvolucionom interpolacijom. Kao mera preciznosti koristi se srednje kvadratna greška (**eng.** *Mean Square Error, MSE*). Modifikacijom signala u vremenskom domenu prozorskim funkcijama moguće je povećati preciznost interpolacije. U radu je prikazan algoritam kojim se određuje optimalna vrednost parametra Polya konvolucionog interpolacionog jezgra. Na osnovu rezultata koji su prikazani tabelarno i grafički izvršena je komparativna analiza efikasnosti procene fundamentalne frekvencije u odnosu na algoritmima gde je implementirano Keysovo jedno-parametarsko interpolaciono jezgro [17], kvadratno [2], Polya kvazi-racionalno i Polya racionalno parametarsko interpolaciono jezgro.

Dalja organizacija rada je sledeća. U sekciji 2 definisane su Polya frekventne funkcije. U sekciji 3 prikazano je Polya parametarsko interpolaciono jezgro i algoritam za određivanje

parametra Polya interpolacionog jezgra. Eksperimentalni rezultati i komparativna analiza opisani su u sekciji 4. U sekciji 5 dat je zaključak.

## II. POLYA FREKVENTNE FUNKCIJE

Pri interpolaciji rasutih podataka koriste se Polya frekventne funkcije, odnosno formira se jezgro na osnovu Polya frekventnih funkcija. U procesu stvaranja Polya jezgra kreće se od: a) pozitivno definitnih i b) radijalnih funkcija [16]

### A. Pozitivno definitne funkcije

*Definicija 1.* Nепrekidna kompleksno-vrednosna funkcija  $f : R^d \rightarrow C$  je pozitivno definitna ako je:

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N c_j \overline{c_k} f(x_j - x_k) \geq 0, \quad (1)$$

za proizvoljan izbor  $x_1, \dots, x_N \in R^d, c_1, \dots, c_N \in C$ . Funkcija  $f(x)$  naziva se striktno pozitivno definitna na  $R^d$ , ako je kvadratna forma iz (1) veća od 0 za  $c_1, \dots, c_N \in C / \{0\}$ .

Jedan od najznačajnijih rezultata o pozitivno definitnim funkcijama i njihovoj karakterizaciji u smislu Furijeove transformacije na skupu  $R$ , dao je Bochner 1932. a 1933. i na skupu  $R^d$  [13].

*Teorema 1 (Bochner).* Kompleksna funkcija  $f(x)$  je pozitivno definitna funkcija na  $R^d$  ako i samo ako je  $f(x)$  Furijeova transformacija konačne nenegativne Borelove mere  $\mu$  na  $R^d$ , tj. važi  $f(x) = \int_{R^d} e^{-ixy} d\mu(y)$ . Osim toga, ako je  $\mu$  nenegativna konačna Borelova mera na  $R^d$  čiji nosač nije skup Lebegove mere nula, onda je  $f(x)$  striktno pozitivno definitna.

Dokaz ove teoreme može se videti u [13].

### B. Radijalne funkcije

*Definicija 2.* Funkcija  $f(x)$  je radijalna ako je  $f(x) = F(\|x\|)$ , gde je  $\|x\|$  Euklidska norma na  $R^d$ .

U radu [6] Shoneberg daje karakterizaciju pozitivno definitnih radijalnih funkcija.

*Teorema 2 (Schoenberg).* Nепrekidna funkcija  $f(x) = F(\|x\|)$  je pozitivno definitna i radijalna na  $R^d$  za svako  $d=1,2,\dots$  ako i samo ako se može predstaviti u obliku

$$F(r) = \int_0^\infty e^{-r^2 t^2} d\mu(t), \quad (2)$$

gde je  $\mu$  konačna nenegativna Borelova mera na  $[0, \infty)$ .

Dokaz ove teoreme može se videti u [14].

### C. Polya frekventne funkcije

*Definicija 3.* Nenegativna merljiva funkcija  $\Lambda(x)$ , koja na  $R$  zadovoljava uslov  $0 < \int_R \Lambda(x) dx < \infty$ , naziva se Polya frekventna funkcija ako zadovoljava sledeći uslov: za svaka dva skupa striktno rastućih brojeva:

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n \quad y_1 < y_2 < \dots < y_n \quad v=1,2,\dots \quad (3)$$

je:

$$\det \left\{ \Lambda(x_i - y_j) \right\}_{1,n} \geq 0. \quad (4)$$

Schoenberg daje potrebne i dovoljne uslove da integrabilna funkcija bude Polya frekventna funkcija.

*Teorema 3 (Schoenberg).* Dvostrana Laplasova transformacija Polya frekventne funkcije  $\Lambda(x)$  konvergira na vertikalnoj oblasti i može se zapisati kao:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} \Lambda(x) dx = \frac{1}{\Psi(s)}, \quad (5)$$

gde je  $\Psi(s)$  cela funkcija oblika:

$$\Psi(s) = C e^{-\gamma s^2 - \delta_0 s} \prod_{m=1}^{\infty} (1 + s \delta_m)^{-s \delta_m}, \quad (6)$$

$$C > 0, \gamma \geq 0, \delta_m \in R, \quad 0 < \gamma + \sum_{m=1}^{\infty} \delta_m^2 < \infty. \quad (7)$$

Osim toga, kada je  $\gamma > 0$ , funkcija  $\Lambda(x) > 0$  je klase  $C^\infty(R)$  i njeni izvodi  $\Lambda^{(n)}(x)$  imaju samo  $n$  prostih realnih nula za sve vrednosti  $n$

Dokaz ove teoreme može se videti u [15].

Interesantna posledica ove teoreme je egzistencija Polya frekventne funkcije  $\Lambda(x)$  čija je dvostrana Laplasova transformacija kvaziracionalna funkcija (može se zapisati kao proizvod racionalne i cele funkcije). Naime, zamenjujući u formuli (6)  $\delta_m = 0$  pri  $m > M_0 \geq 1$  dobija se:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} \Lambda(x) dx = \frac{1}{C} e^{\gamma s^2 + \sum_{m=0}^{M_0} \delta_m s} \prod_{m=1}^{M_0} \frac{1}{1 + s \delta_m}. \quad (8)$$

Zamenom u (5)  $s = i\omega$  dobija se:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} \Lambda(x) dx = \frac{1}{\Psi(i\omega)} = h(\omega). \quad (9)$$

Sa druge strane zamenom u (8) dobija se:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} \Lambda(x) dx = \frac{1}{C} e^{\gamma(i\omega)^2 + \sum_{m=0}^{M_0} \delta_m i\omega} \prod_{m=1}^{M_0} \frac{1}{1 + i\omega \delta_m}. \quad (10)$$

Zamenom  $C=1$ ,  $M_0=2$ ,  $\gamma=\delta_0=0$ ,  $0 < c = \delta_1 = -\delta_2$  u (10) dobija se izraz za racionalno Polya jezgro:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} \Lambda(x) dx = \frac{1}{1 + c^2 \omega^2} = h(\omega), \quad (11)$$

gde je:

$$\Lambda(x) = \frac{1}{2c} e^{\left(\frac{|x|}{c}\right)}, \quad (12)$$

Polya frekventna funkcija.

Za  $C=1$ ,  $M_0=1$ ,  $\gamma=0$ ,  $0 < c = \delta_1 = -\delta_0$  u (10) dobija se izraz za Polya kvazi-racionalno interpolaciono jezgro:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} \Lambda(x) dx = \frac{1}{1 + i\omega c} = h(\omega), \quad (13)$$

sa Polya frekventnom funkcijom:

$$\Lambda(x) = \frac{1}{c} e^{\left(\frac{-x}{c}\right)} \psi(x), \quad (14)$$

gde je  $\psi(x)$  Hevisajdova funkcija.

U slučaju kada je  $\Psi(i\omega) = (1 + ic\omega)e^{\gamma\omega^2}$  dobija se:

$$h(\omega) = \frac{e^{-\gamma\omega^2}}{1 + ic\omega}, \quad (15)$$

sa Polya interpolacionom funkcijom:

$$\Lambda(x) = \frac{1}{2c} e^{\left(\frac{\gamma-cx}{c^2}\right)} \operatorname{erfc}\left(\frac{2\gamma-cx}{2c\sqrt{\gamma}}\right), \quad (16)$$

gde je  $\operatorname{erfc}\left(\frac{2\gamma-cx}{2c\sqrt{\gamma}}\right)$  odgovarajuća funkcija greške.

### III. POLYA JEZGRO

#### A. Jezgro

Uvodeći analogiju sa Polya frekventnom funkcijom, odnosno sa njenom Furijeovom transformacijom na osnovu (15) konstruisano je parametarsko konvoluciono interpolaciono jezgro:

$$r(f) = \begin{cases} \frac{e^{-\gamma f^2}}{\sqrt{1 + \alpha^2 f^2}}, & k-1 \leq |f| \leq k, \quad k=1,2,\dots,L/2 \\ 0 & |f| > L/2 \end{cases}, \quad (17)$$

gde  $\alpha$  predstavljaju parametar jezgra, a  $\gamma$ . pozitivnu konstantu.

Interpolaciono jezgro (17) ne zadovoljava uslov  $r(f_k) = 0$ , što kao posledicu dovodi do toga da interpolirana funkcija ne prolazi kroz čvorove. Samim tim ovako generisana funkcija predstavlja aproksimaciju funkcije.

#### B. Algoritam određivanja parametra interpolacionog jezgra

U ovom radu analizirana je problematika procene fundamentalne frekvencije signala analizom u spektralnom domenu. Zbog toga će parametar  $\alpha$  biti odabran tako da se minimizira greška procene fundamentalne frekvencije u spektralnom domenu.

Algoritam određivanja parametra  $\alpha$  interpolacionog jezgra sastoji se od sledećih koraka:

**Ulaz:** signal  $s(n)$ , dužina sekvence  $N$ , realna fundamentalna frekvenca  $f_0$ .

**Izlaz:** parametar jezgra  $\alpha_{opt}$ .

**Korak1:** Modifikacija  $s$  prozorskom funkcijom  $w$  dužine  $N$ :

$$s_w = s \cdot w. \quad (18)$$

**Korak 2:** Primenom diskretne Furijeove transformacije izračunava se spektar  $X$ :

$$X = DFT(s_w, N). \quad (19)$$

**Korak 3:** Metodom pikovanja određuje se pozicija spektralne komponente sa najvećom amplitudom  $k_{max} = \text{peak\_picking}(X)$ .

Korak 4: Primenom konvolucione interpolacije u okolini  $k_{max}$  određuje se rekonstruisana funkcija  $X_r(f)$ .

Korak 5: Određivanje pozicije maksimuma od  $X_r(f)$ , odnosno procena fundamentalne frekvence  $f_e$ .

Korak 6: Izračunavanje srednje kvadratne greške između procenjene i realne fundamentalne frekvencije u zavisnosti od parametra.

$$MSE(\alpha) = \overline{(f_o - f_e)^2}. \quad (20)$$

Korak 7: Lociranje minimuma MSE i određivanje optimalne vrednosti parametra  $\alpha_{opt}$ .

#### IV. EKSPERIMENTALNI REZULTATI I ANALIZA

##### A. Eksperiment

Procena optimalnog parametra Polya interpolacionog jezgra kao i izbor prozorske funkcije realizovan je primenom algoritama za procenu parametra (opisan u sekciji 3.B) nad test signalom. Test signal je složeni sinusoidalni signal oblika [6]:

$$s(t) = \sum_{i=1}^K \sum_{g=0}^M a_i \sin \left( 2\pi \left( f_0 + g \frac{f_0}{KM} \right) t + \theta_i \right). \quad (21)$$

gde je  $f_0$  fundamentalna frekvencija,  $a_i$  i  $\theta_i$  amplituda i faza  $i$ -togh harmonika respektivno, K broj harmonika, a M broj tačaka između dva sempla. U ovom eksperimentu korišćeni su parametri  $f_0=125$ -140 Hz, frekvencija semplovanja  $f_s=8$  kHz, dužina bloka  $N=256$  (32 ms),  $K=10$ ,  $M=100$ .

##### B. Rezultati

Primenom Polya jezgra (12) dužine  $L=4$  nad test signalom uz primenu Hamming-ovog, Hann-ovog, Blackman-ovog, pravougaonog, Kaiser-ovog i trougaonog prozora, dobijeni su rezultati za  $MSE_{min}$  i  $\alpha_{opt}$  koji su prikazani u tabeli 1 i na sl.1-6, i to: a) Hamming (sl. 1), b) Hann (sl. 2), c) Blackman (sl. 3), d) pravougaoni (sl. 4), e) Kaiser (sl. 5) i f) trougaoni (sl. 6). U cilju upoređivanja rezultata u tabelama 2-5 prikazani su respektivno rezultati dobijeni primenom Kejsovog jednoparametarskog interpolacionog jezgra [17] kvadratnog interpolacionog jezgra [2], Polya kvazi-racionalnog parametarskog jezgra i Polya racionalnog parametarskog interpolacionog jezgra [16].

TABELA I. MINIMALNA VREDNOST MSE PRIMENOM POLYA PARAMETARSKOG KONVOLUCIONOG JEZGRA.

PROZOR	$\alpha_{opt}$	$MSE_{min}$
Hamming	-0.35	0.0012
Hann	-0.40	0.0125
Blackman	-0.75	0.0329
Pravougaoni	0.00	1.0745
Kaiser	-0.70	0.0140

Trougaoni	-0.44	0.0029
-----------	-------	--------

TABELA II. MINIMALNA VREDNOST MSE PRIMENOM KEYSOVOG JEDNOPARAMETARSKOG [17].

PROZOR	$\alpha_{opt}$	$MSE_{min}$
Hamming	-1.0100	0.0068
Hann	-0.8800	0.00063836
Blackman	-0.8000	0.00043616
Pravougaoni (16)	-2.6400	0.1805
Kaiser	-1.1300	0.0058
Trougaoni	-1.0300	0.0015

TABELA III. MINIMALNA VREDNOST MSE PRIMENOM KVADRATNOG KONVOLUCIONOG JEZGRA [2].

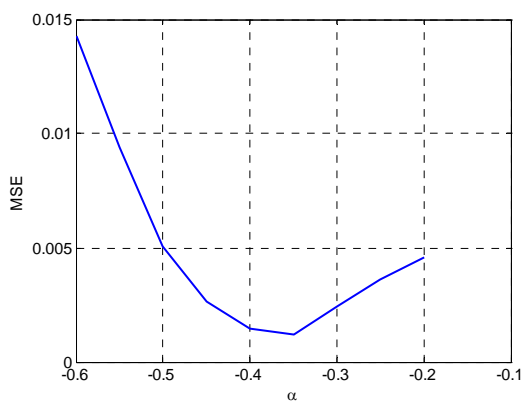
PROZOR	$\alpha_{opt}$	$MSE_{min}$
Hamming	-1.125	0.8727
Hann	-1.100	0.899
Blackman	-0.915	0.6014
Pravougaoni	-0.010	0.0726
Kaiser	-1.065	0.963
Trougaoni	-1.140	1.0026

TABELA IV. MINIMALNA VREDNOST MSE PRIMENOM POLYA KVAZI-RACIONALNOG PARAMETARSKOG JEZGRA.

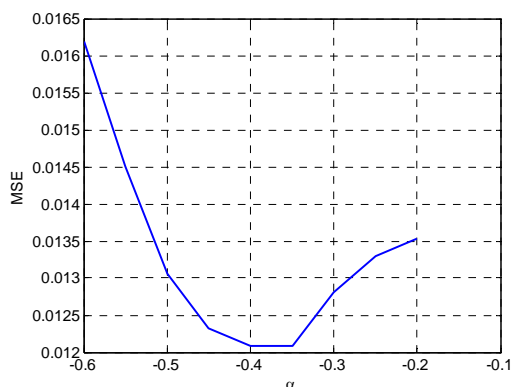
PROZOR	$\alpha_{opt}$	$MSE_{min}$
Hamming	-0.4500	0.0068
Hann	-0.4500	0.0138
Blackman	-0.7000	0.0300
Pravougaoni	-0.0600	0.6717
Kaiser	-0.7000	0.0155
Trougaoni	-0.4500	0.0044

TABELA V. MINIMALNA VREDNOST MSE PRIMENOM POLYA RACIONALNOG PARAMETARSKOG JEZGRA.

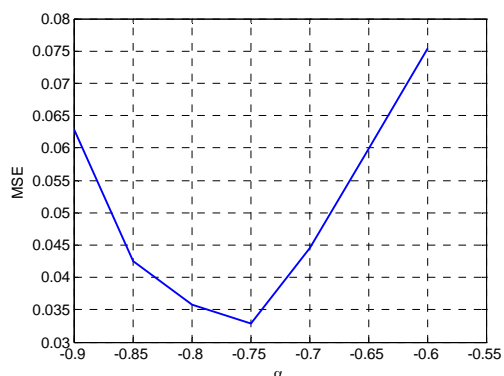
PROZOR	$\alpha_{opt}$	$MSE_{min}$
Hamming	-0.4000	0.0058
Hann	-0.4000	0.0133
Blackman	-0.700	0.0300
Pravougaoni	-0.0500	0.6712
Kaiser	-0.600	0.0058
Trougaoni	-0.4000	0.0015



Slika 1. MSE ( $\alpha$ ) za slučaj primene Hamming-ovog prozora.

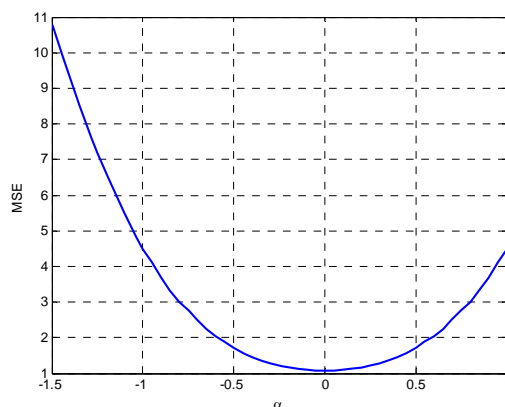


Slika 2. MSE ( $\alpha$ ) za slučaj primene Hann-ovog prozora.

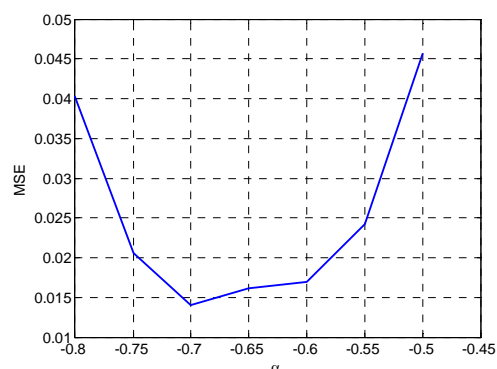


Slika 3. MSE ( $\alpha$ ) za slučaj primene Blackman-ovog prozora.

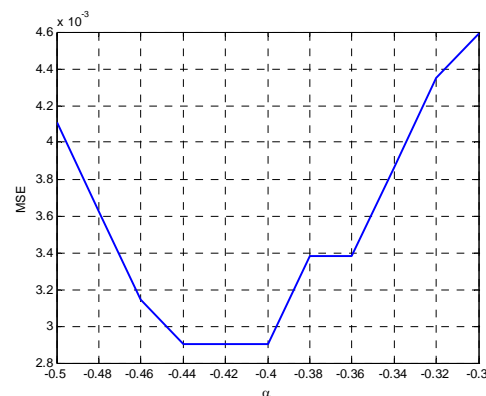
$MSE_{\min Ha \min g. polya.} / MSE_{\min Black.keys} = 2.74$  puta veću grešku,



Slika 4. MSE ( $\alpha$ ) za slučaj primene pravougaonog prozora.



Slika 5. MSE ( $\alpha$ ) za slučaj primene Kaiser-ovog prozora.



Slika 6. MSE ( $\alpha$ ) za slučaj primene trougaonog prozora.

### C. Analiza rezultata

Analizom rezultata za MSE prikazanih u tbl. 1-5 i na sl. 1-6, zaključuje se da je:

a) najmanje  $MSE_{\min}$  dobijeno za Hammingovu prozorsku funkciju. U odnosu na druge prozorske funkcije Hammingova je pokazala bolje rezultate: a) 90% (Han), b) 96% (Blackman), c) 91% (Kaiser), d) 99% (pravougaona) i f) 58% (trougaona),

b) u odnosu na Kejsovo jednoparametarsko kubno konvoluciono jezgro [17] kod kojeg su najbolji rezultati dobijeni primenom Blackman-ovog prozora, Polya jezgro je pokazalo

c) poređenjem sa rezultatima dobijenim primenom kvadratnog interpolacionog jezgra iz [2] gde je najmanje MSE za pravougaonu prozorsku funkciju, Polya parametarsko konvoluciono jezgro ima  $MSE_{\min \text{ pravoug. kvadratno}} / MSE_{\min \text{ Haming polya}} = 60.5$  puta manju srednje kvadratnu grešku.

d) poređenjem sa rezultatima dobijenim primenom Polya kvazi-racionalnog parametarskog jezgra, gde je najmanje MSE dobijeno za trougaonu prozorsku funkciju, predloženo Polya

jezgro ima  $MSE_{\min \text{ Polya kvazi-rac.troug}}/MSE_{\min \text{ Haming polya}}=3.67$  puta manju srednje kvadratnu grešku,

e) poređenjem sa rezultatima dobijenim primenom Polya racionalnog parametarskog jezgra, gde je najmanje MSE dobijeno za trougaonu prozorsku funkciju, predloženo Polya parametarsko konvoluciono jezgro ima  $MSE_{\min \text{ Polya racionalnog.troug}}/MSE_{\min \text{ Haming polya}}=1.25$  puta manju srednje kvadratnu grešku.

## V. ZAKLJUČAK

U ovom radu su prikazani rezultati primene Polya parametarskog konvolucionog jezgra kod procene fundamentalne frekvencije signala. U cilju minimiziranja MSE-a implementirane su neke prozorske funkcije. Detaljna analiza pokazala je da je najbolji izbor Hammingova prozorska funkcija. Poređenjem dobijenih rezultata sa rezultatima procene fundamentalne frekvencije primenom kvadratnog konvolucionog jezgra [2], Keysovog jednoparametarskog jezgra [17] kao i primenom Polya kvazi-racionalnog i Polya racionalnog interpolacionog jezgra zaključuje se da je predloženo Polya parametarsko konvoluciono jezgro efikasnije u odnosu na kvadratno konvoluciono jezgro, Polya kvazi-racionalno i Polya racionalno interpolaciono jezgro, dok je pokazalo manju efikasnost u odnosu na jednoparametarsko Keysovo konvoluciono jezgro. Kako je odlika ovog jezgra mala numerička složenost može se primeniti za rad u realnom vremenu.

## LITERATURA

- [1] N. A. Dodgson, "Quadratic interpolation for image resampling," *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 6, no.9, pp. 1322-1326, Sept. 1997
- [2] N.Savić, Z.Milivojević and D. Brodić, "Estimation of frequency of a signal by means of interpolation with a quadratic convolution kernel," *ETF Journal of Electrical Engineering*, Vol. 20, pp. 40-49, 2014.
- [3] E. Meijering, M. Unser, "A Note on Cubic Convolution Interpolation", *IEEE Transactions on Image Processing*, Vol. 12, No. 4, pp. 447-479, April 2003.
- [4] E. Meijering, K. Zuiderveld, M. Viergever, "Image Reconstruction by Convolution with Symmetrical Piecewise nth-Order Polynomial Kernel's", *IEEE Transactions on Image Processing*, Vol. 8, No. 2, pp. 192-201, Feb. 1999.
- [5] K. S. Park, R. A. Schowengerdt, "Image reconstruction by parametric cubic convolution", *Computer Vision, Graphics & Image Processing*, Vol. 23, pp. 258-272, 1983.
- [6] H.S. Pang, S.J. Baek, K.M. Sung, "Improved Fundamental Frequency Estimation Using Parametric Cubic Convolution," *IEICE Trans. Fundamentals*, Vol. E83-A, No. 12, pp. 2747-2750, Dec. 2000.
- [7] M. Mirković, Z. Milivojević and P. Rajković, "Performances of the system with the implemented PCC algorithm for the fundamental

frequency estimation," *XII Telecommunications Forum TELFOR '04*, Sec. 7. Signal processing, Beograd, 2004.

- [8] R. G. Keys, "Cubic convolution interpolation for digital image processing," *IEEE Trans. Acoust. Speech & Signal Processing*, vol. ASSP-29, pp. 1153-1160, Dec. 1981.
- [9] Z. Milivojević, M. Mirković, S. Milivojević, "Procena Fundamentalne Frekvencije Primenom Parametarske kubne Konvolucije sa Grville-ovim jezgrom", *XIII Telekomunikacioni forum TELFOR 2005*.
- [10] M. D. Buhmann, *Radial Basis Functions*, Cambridge, U.K.: Cambridge Univ. Press, 2003.
- [11] T. Blu and M. Unser, "Wavelets, fractals, and radial basis functions," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol.50, no.3, pp. 543-553, Mar. 2002.
- [12] T. Poggio and F. Girosi, "Networks for approximation and learning," *IEEE*, vol.78, pp. 1481-1497, 1990.
- [13] S. Bochner, "Monotone Funktionen, Stieltjes integrale und harmonische analyse," *Math. Ann.*, vol.108, pp. 378-410, 1933.
- [14] I. J. Schoenberg, "Metric spaces and completely monotone functions," *IEEE, Ann. Math.*, vol.39, pp. 811-841, 1938.
- [15] I. J. Schoenberg, "On totally positive functions, Laplace integrals and entire functions of the Laguerre-Polya Schur type," *J.d. Ann. Math.*, vol.1, pp. 331-374, 1951.
- [16] L. Knockaert, D. D. Zutter and T. Dhaene "Adaptive Interpolation Based on Polya Frequency Functions," *IEEE Trans. On Signal Processing*, vol. 56, No.10, pp. 4683-4691, Oct. 2008.
- [17] Z. Milivojević, D. Brodić, "Estimation Of The Fundamental Frequency Of The Real Speech Signal Compressed By MP3 Algorithm", *Archives of Acoustics*, Vol. 38. No. 3, pp. 363-373, 2013.

## ABSTRACT

The first part of the paper analyzed the positive definite and Polya frequency functions and, based on them Polya parameter interpolation kernel is constructed. The second part presents graphical and tabular results of applying Polya convolution parameter kernel in the estimation of the fundamental frequency of the signal. Based on the mean square error are determined by the optimal kernel parameters for some classic, time-symmetric window function. Finally, a comparative analysis of the results of the estimation of fundamental frequency compared to the results obtained by applying algorithms with Keys one-parameter, quadratic, Polya quasi-rational and Polya rational parameter interpolation kernels is performed.

## ESTIMATE OF THE FUNDAMENTAL FREQUENCY IN THE SPECTRAL DOMAIN USING THE POLYA PARAMETER CONVOLUTION KERNEL

Zoran Milivojević, Nataša Savić, Darko Brodić