

Jednostavna procjena dominantnog rezonantnog vrha signala iz vremenskog domena

Tomislav B. Šekara
Elektrotehnički fakultet
Univerzitet u Beogradu, Srbija
tomi@etf.rs

Milan R. Rapaić
Fakultet tehničkih nauka
Univerzitet u Novom Sadu, Srbija
rapaja@uns.ac.rs

Zoran Ljuboje
Vidan Govedarica
Elektrotehnički fakultet
Univerzitet u I. Sarajevu, R. Srpska
zljuboje@hotmail.com
vidangov@yahoo.com

Sadržaj— U radu će biti prikazana jednostavna procjena dominantnog rezonantnog vrha signala iz vremenskog domena. Ova procjena rezonantnog vrha sistema opisanog funkcijom prenosa $G(s)$ se određuje na osnovu njegovog odskočnog odziva $h(t)$. Kako je u sistemima upravljanja česta analiza i sinteza sistema na odskočni odziv u radu se daje i adekvatna procjena maksimuma dominantnih rezonantnih vrhova kao što su vrijednost: maksimuma absolutne funkcije osjetljivosti (M_s), maksimuma absolutne funkcije komplementarne osjetljivosti (M_p), maksimuma absolutne vrijednosti osjetljivosti na mjerni šum (M_n), itd. Takođe u radu će biti pokazana veza između definicije totalne varijacije (Total Variation) signala (TV) i odgovarajućih rezonantnih vrhova. Metoda je testirana na širokoj klasi tipičnih industrijskih procesa u regulacionom krugu kroz simulacije.

Ključne reči- frekvencijski domen; rezonantni vrh; vremenski domen

I. UVOD

Savremene metode analize i sinteze sistema linearnih dinamičkih sistema, kako onih konačne dimenzije, tako i onih beskonačno-dimenzionih, u mnogome se zasnivaju na različitim transformacionim metodama. Među najpoznatije postupke ovog tipa svakako spada spektralna analiza signala, odnosno postupci zasnovani na Furijeovoj i Laplasovoj transformaciji.

Laplasova transformacija kauzalnog signala f data je kao kompleksna funkcija kompleksne promenljive s

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt. \quad (1)$$

Oblast definisanosti Laplasove transformacije čine sve vrijednosti kompleksne promenljive s za koju definicioni integral konvergira. Sa praktičnog je stanovišta najinteresantnija klasa tzv. eksponencijalno ograničenih signala, tj. klasa signala za koje se mogu naći pozitivno M i realno L tako da važi

$$|f(t)| < Me^{Lt}, \quad t > 0. \quad (2)$$

Za takve signale, može se pokazati da Laplasova transformacija postoji za svako s čiji je realni dio veći ili jednak od eksponencijalnog reda L . Više detalja o Laplasovoj transformaciji, njenim osobinama i osnovnim elementima primjene, čitalac može naći u bogatoj literaturi [1,2].

Među fundamentalnim rezultatima teorije sistema je svakako i taj da se prinudni odziv proizvoljnog linearnog, stacionarnog procesa može računati kao konvolucija pobudnog signala i jedne posebne funkcije, specifične za svaki proces ponaosob, koju nazivamo karakterističnom ili Grinovom funkcijom [2]. Obilježimo li grinovu funkciju procesa sa g , pobudni signal sa u , a prinudni odziv procesa sa y , možemo pisati

$$y(t) = g(t) * u(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau. \quad (3)$$

Lako se pokazuje da je odziv procesa na jediničnu impulsnu pobudu upravo jednak Grinovoj funkciji. Otuda se u inženjerskim disciplinama Grinova funkcija najčešće i naziva impulsnim odzivom procesa. Na osnovu elementarnih osobina Laplasove transformacije slijedi da se Laplasova transformacija prinudnog odziva $Y(s)$ može računati kao proizvod Laplasove transformacije impulsnog odziva $G(s)$ i Laplasove transformacije pobudnog signala $U(s)$. Laplasova transformacija impulsnog odziva naziva se funkcijom prenosa linearnog procesa. Jasno, funkcija prenosa nezavisna je od pobude, a može se računati kao količnik Laplasove transformacije prinudnog odziva i Laplasove transformacije pobudnog signala. Razumije se, ukupan odziv sistema jednak je zbiru prinudnog i sopstvenog odziva. Otuda se pri sračunavanju funkcije prenosa uzima da je sopstveni odziv jednak nuli, tj. da su svi početni uslovi procesa jednaki nuli.

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad (4)$$

Transformacione metode su zadnjih godina usavršene korišćenjem brzih algoritima kao i specijalnog hardvera. Funkcija prenosa nosi kompletnu informaciju o svojstvima odziva procesa. Među naročito interesantnim svojstvima signala svakako spada položaj njegovog dominantnog rezonantnog vrha (videti recimo [2]). U ovom radu biće date procjene dominantnog rezonantnog vrha signala bez računanja njegove Furijeove transformacije, odnosno Laplasove transformacije. Dominantni rezonantni vrh sistema opisan funkcijom prenosa predstavlja supremum absolutne vrijednosti funkcije prenosa po svim frekvencijama tj.

$$M = \sup_{\omega} |G(i\omega)|. \quad (5)$$

Ako se uvede norma H_p definisana relacijom (6) iz [3]

$$H_p = \sqrt[p]{\int_0^\infty |f(x)|^p dx} = \|f(x)\|_p, \quad p = 1, 2, \dots \quad (6)$$

$$H_\infty = \sup_\omega H(j\omega) = \|f(x)\|_\infty$$

jednakost (5) može da se iskaže i preko H_∞ norme

$$M = \|G(i\omega)\|_\infty \quad (7)$$

Iskazivanje dominantnog rezonantnog vrha preko normi H_p omogućuje nam jednostavnu njegovu procjenu iz impulsnog odnosno odskočnog odziva procesa opisanog funkcijom prenosa $G(s)$. Druga važna veličina koja se sreće u analizi signala je totalna varijacija signala TV koja je definisana osnovnom relacijom za kontinualan signal $g(t)$, $t \in R$

$$TV[g] = \int_0^\infty \left| \frac{dg(t)}{dt} \right| dt \quad (8)$$

odnosno TV za diskretan signal $g[n]$, $n \in N_0$

$$TV[g] = \sum_{n=0}^{\infty} |g[n+1] - g[n]| \quad (9)$$

Veličina TV u sistemima upravljanja se često primjenjuje kao jedan od parametara procjene performansi [4].

Od posebnog je interesa naglasiti da se mnoge mere robusnosti, odnosno otpornosti i osetljivosti, definišu kao vrednosti rezonantnih vrhova odgovarajućih funkcija prenosa. Ove mere osetljivosti se koriste u savremenim metodama analize i sinteze sistema automatskog upravljanja. Uobičajeno je da se vrednosti ovih pokazatelja računaju na osnovu poznavanja analitičkog izraza za funkciju prenosa upravljanog procesa, ili barem procenjenih vrednosti frekvencijskog odziva u određenom opsegu. Mogućnost procene vrednosti ovih pokazatelja na osnovu tipičnih odziva procesa, dakle samo na osnovu rezultata jednostavnih eksperimenata od velikog je značaja za teoriju upravljanja i druge srodne metode koje se koriste njenim rezultatima.

Rad je organizovan na sledeći način. U odeljku II prikazan je postupak određivanja rezonantnog vrha u opštem slučaju. U odeljku III prikazani su rezultati simulacije u važnom slučaju procesa drugog reda, te postupci izračunavanja pokazatelja robusnosti za jednu široku klasu procesa. Zaključna razmatranja prikazana su u odeljku IV.

II. PROCJENA DOMINANTNOG REZONANTNOG VRHA SIGNALA IZ VREMENSKOG DOMENA

Koristeći se osnovnom definicijom Laplaceove transformacije vremenskog signala $g(t)$

$$G(s) = \int_0^\infty g(t)e^{-st} dt, \quad (10)$$

na osnovu nejednakosti $\left| \int_D f(t)g(t)dt \right| \leq \int_D |f(t)||g(t)|dt$ i (10) dobija se nejednakost

$$|G(i\omega)| = |G(s)|_{s=i\omega} \leq \int_0^\infty |g(t)| |e^{-i\omega t}| dt = \int_0^\infty |g(t)| dt \quad (11)$$

koja je zadovoljena po svim frekvencijama ω . Odaberimo onu frekvenciju koja odgovara dominantnom rezonantnom vrhu, tj.

$$\sup_\omega |G(i\omega)| \leq \int_0^\infty |g(t)| dt \quad (12)$$

ili iskazano preko normi $\|G(i\omega)\|_\infty \leq \|g(t)\|_1$. Iz teorije linearnih vremenski invarijantnih sistema signal $g(t)$ predstavlja impulsni odziv sistema čija je funkcija prenosa $G(s)$. Pošto je veza između odskočnog odziva $h(t)$ sistema i njegovog impulsnog odziva $g(t)$ data sa $g(t) = -dh(t)/dt$, relacija (12) postaje

$$\sup_\omega |G(i\omega)| \leq \int_0^\infty \left| \frac{dh(t)}{dt} \right| dt = TV[h] \quad (13)$$

Dobijena relacija (13) u sistemima upravljanja predstavlja važnu vezu između parametara robusnosti i parametara performansi. Na ovaj način se otvara veća mogućnost analize i sinteze sistema upravljanja.

III. SIMULACIONA ANALIZA

Pokažimo prethodnu opštu teoretsku analizu procjene dominantnog rezonantnog vrha na sistemu drugog reda sa transportnim kašnjenjem [2]

$$G_1(s) = \frac{1}{s^2 + 2\zeta s + 1} e^{-\tau s}, \quad \zeta \in [0, 1]. \quad (14)$$

Korišćenjem elementarne matematike dobija se

$$\sup_\omega |G_1(i\omega)| = \begin{cases} \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}, & \zeta \in [0, \sqrt{2}/2] \\ 1, & \zeta > \sqrt{2}/2 \end{cases} \quad (15)$$

$$\int_0^\infty |g_1(t)| dt = 1 / \operatorname{tgh} \left(\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right) \quad (16)$$

gdje je $g_1(t) = \frac{e^{-\zeta t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(t\sqrt{1-\zeta^2})$ impulsni odziv funkcije prenosa $G_1(s)$. Dobijene rezultate (15) i (16) prikažimo na Sl.1.

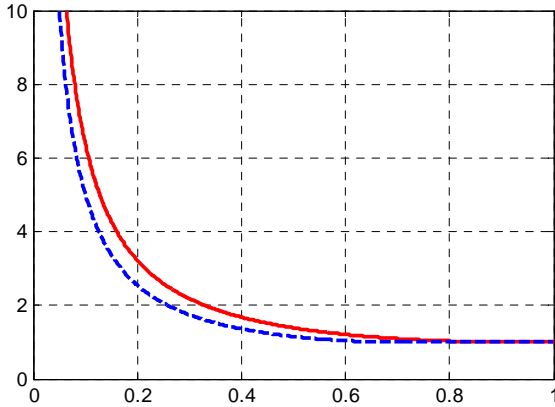
Na osnovu prethodne slike se uočava da je procjena dominantnog rezonantnog vrha kvalitativna jer su tačna vrijednost rezonantnog vrha i procijenjena dovoljno bliske i postaju jednake za parametar $\zeta \geq 1$.

Ova metoda procjene dominantnog rezonantnog vrha je primijenjena za procjenu parametara robusnosti M_s , M_p i M_n

$$M_s = \|1/(1 + C(i\omega)G_p(i\omega))\|_\infty \quad (17)$$

$$M_p = \left\| \frac{C(i\omega)G_p(i\omega)}{1+C(i\omega)G_p(i\omega)} \right\|_{\infty} \quad (18)$$

$$M_n = \left\| \frac{C(i\omega)}{1+C(i\omega)G_p(i\omega)} \right\|_{\infty} \quad (19)$$



Slika 1. Dobijena procjena dominantnog rezonantnog vrha sistema drugog reda (14) je označena punom linijom (crvena) dok je tačna vrijednost rezonantnog vrha označena isprekidanom linijom (plava) za $\zeta \in [0,1]$.

i testirana je za 10 procesa različite dinamike sa PID regulatorom podešenim iz [5], [6]. Dobijeni rezultati prikazani su u Tabeli 1. Funkcije prenosa testiranih procesa su:

$$G_1(s) = \frac{1}{(s+1)^4}, G_2(s) = \frac{4e^{-2s}}{4s-1}, G_3(s) = \frac{2e^{-s}}{(5s+1)(10s+1)}$$

$$G_4(s) = \frac{1}{\prod_{k=0}^3 (0,7^k s + 1)}, G_5(s) = \frac{e^{-0,5s}}{s}, G_6(s) = \frac{1-s}{(s+1)^3}$$

$$G_7(s) = \frac{e^{-s}}{(s^2+0,1s+1)}, G_8(s) = \frac{(2s+1)e^{-4s}}{(10s+1)(7s+1)(3s+1)}$$

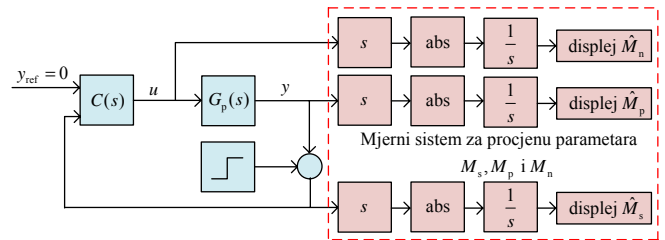
$$G_9(s) = -\frac{1,6(-0,5s+1)}{s(3s+1)}, G_{10}(s) = \frac{e^{-0,5s}}{(5s-1)(2s+1)(0,5s+1)}$$

TABELA 1. TAČNI I PROCJENJENI PARAMETRI M_s , M_p i M_n U ZATVORENOJ SPREZI SA PID IZ [5],[6] ZA PROCESE $G_p(s)$, $J=1, \dots, 10$.

Proces\Parametri		M_s	M_p	M_n
$G_1(s)$	Procijenjeno	2,65	1,65	51,94
	Tačno	1,95	1,27	26,16
$G_2(s)$	Procijenjeno	5,28	4,28	6,32
	Tačno	3,48	3,14	2,41
$G_3(s)$	Procijenjeno	2,76	1,76	133,42
	Tačno	1,93	1,50	64,41
$G_4(s)$	Procijenjeno	2,69	1,69	51,35
	Tačno	1,96	1,31	31,41
$G_5(s)$	Procijenjeno	3,18	2,18	25,47
	Tačno	2,49	1,71	11,92
$G_6(s)$	Procijenjeno	2,46	1,46	15,2
	Tačno	1,76	1,01	8,27

$G_7(s)$	Procijenjeno	2,57	1,57	7,55
	Tačno	1,77	1,00	3,18
$G_8(s)$	Procijenjeno	2,59	1,59	57,22
	Tačno	2,05	1,30	27,91
$G_9(s)$	Procijenjeno	3,39	2,39	23,46
	Tačno	1,80	1,60	11,22
$G_{10}(s)$	Procijenjeno	4,00	3,00	45,44
	Tačno	2,21	2,36	20,57

Procijenjeni rezultati parametara M_s , M_p i M_n prikazani u Tabeli 1 su dobijeni na osnovu modela u Simulinku kao što je prikazan blok šemom na Sl. 2.



Slika 2. Blok šema estimatora M_s , M_p i M_n procesa $G_p(s)$ u zatvorenoj sprezi sa PID regulatorom $C(s)$.

Kao što se vidi iz tabele procijenjene vrijednosti parametara M_s , M_p i M_n su kvalitativne za ocjenu robusnosti regulacionog sistema a koje su dobijene iz vremenskog domena korišćenjem estimatora sa Sl. 2.

Dalja istraživanja će se odnositi na tačniju procjenu dominantnih rezonantnih vrhova iz vremenskog domena koristeći se sličnim jednostavnim metodama prikazanim u ovom radu. Treba naglasiti da ove metode mogu pojednostaviti analizu i sintezu regulacionih sistema u smislu željenih performansi i robusnosti u vremenskom domenu.

IV. ZAKLJUČAK

U radu je data jednostavna procjena dominantnog rezonantnog vrha linearnih vremenski invarijantnih sistema opisanog funkcijom prenosa na osnovu njegovog impulsnog odziva. Metoda je testirana na standardnom sistemu drugog reda analitički i na deset tipičnih modela industrijskih procesa kroz simulacije. Procijenjene vrijednosti dominantnog rezonantnog vrha su bile kvalitativne u odnosu na tačnu njegovu vrijednost. Dalja istraživanja će se odnositi na tačniju procjenu dominantnih rezonantnih vrhova iz vremenskog domena koristeći se sličnim jednostavnim metodama prikazanim u ovom radu. Treba naglasiti da ove metode mogu pojednostaviti analizu i sintezu regulacionih sistema u smislu željenih performansi i robusnosti u vremenskom domenu.

LITERATURA

- [1] J. L. Schiff, The Laplace Transform: Theory and Applications. New York: Springer Verlag, 1999.
- [2] Milić Stojić, Sistemi automatskog upravljanja, Stilos 2001.
- [3] Olga Hadžić, Stevan Pilipović, Uvod u funkcionalnu analizu, Univerzitet u Novom Sadu, 2001

- [4] Skogestad, S. Simple analytic rules for model reduction and PID controller tuning. *Journal of Process Control*, Volume 13, pp. 291–309, 2003.
- [5] M.R. Mataušek, T.B. Šekara, PID controller frequency-domain tuning for stable, integrating and unstable processes, including dead-time, *Journal of Process Control*, Volume 21, pp. 17-27, 2011.
- [6] Tomislav B. Šekara, Miroslav R. Mataušek, Classification of dynamic processes and PID controller tuning in a parameter plane, *Journal of Process Control*, Volume 21, pp. 620-626, 2011.

ABSTRACT

In this paper a simple procedure for assessment of dominant resonant peak has been presented. The procedure is based on time-domain computations and does not involve explicit evaluation of Laplace or Fourier transform. The method approximates peak amplitude

response of a system described by transfer function $G(s)$ by means of its step-response. Since the control design is usually based on step-response method, the paper also presents adequate assessments of the maximum absolute sensitivity (M_s), maximum absolute complementary sensitivity (M_p), maximum absolute noise sensitivity (M_n), etc. Also, the paper present link of the total variance of a signal and its dominant resonant peak. The method has been tested on a number of industrial process models.

**A SIMPLE ASSESMENT OF THE DOMINANT
RESONANT PEAK FROM THE TIME DOMAIN**

Tomislav B. Šekara, Milan R. Rapačić,
Ljuboje Zoran, Vidan Govedarica