Primena numeričkih metoda inverzne Laplasove transformacije u rešavanju jedne klase parcijalnih diferencijalnih jednačina fizičkih procesa

Mladen Lazarević, Zaviša Gordić, Branko Lukić
Studenti drugog stepna studija (master)
Elektrotehnički fakultet
Univerzitet u Beogradu, Srbija
mladenmlazarevic@gmail.com, zavisa89@gmail.com, brankolukic1@gmail.com

Sadržaj — **U ovom radu data je metodologija za rešavanje parcijalnih diferencijalnih jednačina drugog reda funkcija dve promenljive pomoću Laplasove transformacije. Za inverziju Laplasove transformacije korišćene su numeričke metode, čiji je algoritam prezentovan u radu. Navedena metodologija je primenjena na rešavanje praktičnih problema i izvršeno je poređenje dobijenih rezultata.**

Ključne reči – inverzna Laplasova transformacija; parcijalna diferencijlna jednačina; Ojlerov algoritam; Talbotov algoritam; Gaver-Štefestov algoritam; modifikovani Talbotov algoritam;

I. UVOD

Mnogi fizički procesi opisuju se parcijalnim diferencijalnim jednačinama. Cilj je da se što lakše dođe do njihovog rešenja. Jedan od najčešće korišćenih postupaka za rešavanje parcijalnih diferencijalnih jednačina je primenom Laplasovih transformacija.

Za funkciju dve varijable $u = u(x, y)$, parcijalna diferencijalna jednačina drugog reda ima oblik:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu = g,$$

gde a, b, c, d, e, f, g mogu zavisiti jedino od x i y. Postoje tri tipa ovakvih parcijalnih diferencijalnih jednačina. Ovu jednačinu nazivamo

eliptičnom ako je $b^2 - ac < 0$,

hiperboličnom ako je $b^2 - ac > 0$,

paraboličnom ako je $b^2 - ac = 0$.

Algoritam za rešavanje parcijalnih diferencijalnih jednačina (PDJ) pomoću Laplasovih transformacija je sledeći: polazi se od zadate PDJ sa početnim i graničnim uslovima, a zatim se primenjuje Laplasova transformacija po drugoj promenljivoj, odnosno vremenu. Dobija se obična diferencijalna jednačina (sa graničnim uslovima) rešava se sa respektom prema graničnim uslovima i izvrši se inverzna Laplasova transformacija. Dobijeno rešenje je rešenje polazne diferencijalne jednačine.

Ovaj algoritam ima tri veće poteškoće: nalaženje Laplasove transformacije određene parcijalne diferencijalne jednačine (ukoliko imamo jednačine sa nekonstantnim koeficijentima, ne znamo kako da nađemo njihovu Laplasovu transformaciju), rešavanje obične diferencijalne jednačine, i nalaženje inverzne Laplasove transformacije [1].

Najveći od ova tri problema je nalaženje inverzne Laplasove transformacije (analitički). Međutim, postoje brojni razvijeni numerički algortimi koji nalaze inverznu Laplasovu transformaciju, čijom primenom prevazilazimo ove teškoće i to nam značajno olakšava rešavanje PDJ.

U radu su korišćena četri algoritma za nalaženje inverzne Laplasove transformacije: Gaver-Štefestov, Ojlerov, Talbotov i modifikovani Talbotov algoritam.

II. ANALIZA PROBLEMA

Laplasova transformacija. [2]-[4] Posmatrajmo funkciju $u = u(x,t)$, gde je $t \geq 0$ vremenska varijabla.

Označimo sa $U(x,s)$ Laplasovu transformaciju funkcije $u(x,t)$ po promenljivoj *t,* odnosno:

$$U(x,s) = \mathcal{L}\big(u(x,t)\big) = \int_0^\infty e^{-st} u(x,t)\,dt.$$

Za potrebe rešavanja diferencijalnih jednačina koristimo i Laplasove transformacije izvoda funkcije $u(x,t)$ po promenljivim *x* i *t*:

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x} U(x,s)$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x,s)$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = s\mathcal{L}\big(u(x,t)\big) - u(x,0) = sU(x,s) - u(x,0)$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = s^2 U(x,s) - su(x,0) - u_t(x,0)$$

Inverzija Laplasove transformacije tražena je pomoću numeričkih algoritama, datih u nastavku. Poređena je brzina izvršavanja ovih algoritama, kao i greška prilikom izračunavanja rešenja.

Iz postupka za rešavanje ovih diferencijalnih jednačina, datog u uvodu, vidi se da je potrebno naći i inverznu Laplasovu transformaciju dobijenog rešenja obične diferencijalne jednačine. Ta inverzija se vrši numerički za niz vrednosti promenljive x u željenom intervalu, i na taj način se dobija rešenje polazne jednačine.

Svi navedeni numerički algoritmi polaze od relacije [5]:

$$f(t) \approx f_n(t) \equiv \frac{1}{t}\sum_{k=0}^{n} \omega_k \hat{f}\left(\frac{\alpha_k}{t}\right),\ 0 < t < \infty$$

gde su ω_k i α_k kompleksni brojevi, koji zavise od n, ali ne zavise od transformacije $\hat{f}$ ili vremena t.

Zavisno od izbora ω_k i α_k može se imati više različitih algoritama.

Talbotov algoritam [5]-[6]:

$$f_b(t,M) = \frac{2}{5t}\sum_{k=0}^{M-1} \mathrm{Re}\left(\gamma_k \hat{f}\left(\frac{\delta_k}{t}\right)\right),$$

$$\delta_0 = \frac{2M}{5},\ \delta_k = \frac{2k\pi}{5}\left(\cot(k\pi/M) + i\right),\ 0 < k < M,$$

$$\gamma_0 = \frac{1}{2}e^{\delta_0},$$

$$\gamma_k = \left[1 + i(k\pi/M)\left(1 + \left[\cot(k\pi/\pi)\right]^2\right) - i\cot(k\pi/M)\right]e^{\delta_k},$$

$$0 < k < M.$$

Ojlerov algoritam [5]:

$$f_e(t,M) = \frac{10^{M/3}}{t}\sum_{k=0}^{2M} \eta_k \,\mathrm{Re}\left(\hat{f}\left(\frac{\beta_k}{t}\right)\right),$$

$$\beta_k = \frac{M\ln(10)}{3} + \pi i k,\ \eta_k \equiv (-1)^k \xi_k,$$

$$\xi_0 = \frac{1}{2},\ \xi_k = 1,\ 1 \le k \le M,\ \xi_{2M} = \frac{1}{2^M},$$

$$\xi_{2M-k} = \xi_{2M-k+1} + 2^{-M}\binom{M}{k},\ 0 < k < M.$$

Gaver-Štefestov algoritam [5]:

$$f_g(t,M) = \frac{\ln(2)}{t}\sum_{k=1}^{2M} \zeta_k \hat{f}\left(\frac{k\ln(2)}{t}\right),$$

$$\zeta_k = (-1)^{M+k}\sum_{j=[(k+1)/2]}^{k\wedge M} \frac{j^{M+1}}{M!}\binom{M}{j}\binom{2j}{j}\binom{j}{k-j}.$$

Modifikovani Talbotov algoritam [7], koji je modifikacija Talbotovog algoritma pomoću optimalnih koeficijenata kako bi se dobila manja greška pri numeričkoj inverziji:

$$\delta_0 = 0.376055762M,$$

$$\delta_k = M(0.5017k\pi/M \cdot \cot(0.6407k\pi/M) - 0.6122 + 0.2645\,k\pi/M \cdot i),$$

$$\gamma_k = M[0.05017\cot(0.6407(k\pi/M)) + 0.05017(k\pi/M)(-0.64070.6407\left[\cot(0.6407k\pi/\pi)\right]^2) + 0.2645i]e^{\delta_k}.$$

III. Rezultati

Prvo su sva tri algoritma testirana na istoj parcijalnoj diferencijalnoj jednačini paraboličnog tipa.

To je takozvana toplotna jednačina [1], kojom se opisuje distribucija toplote u datom regionu tokom vremena:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0 < x < \infty,\ t > 0,$$

sa početnim uslovom

$$u(x,0) = 1,\ 0 < x < \infty$$

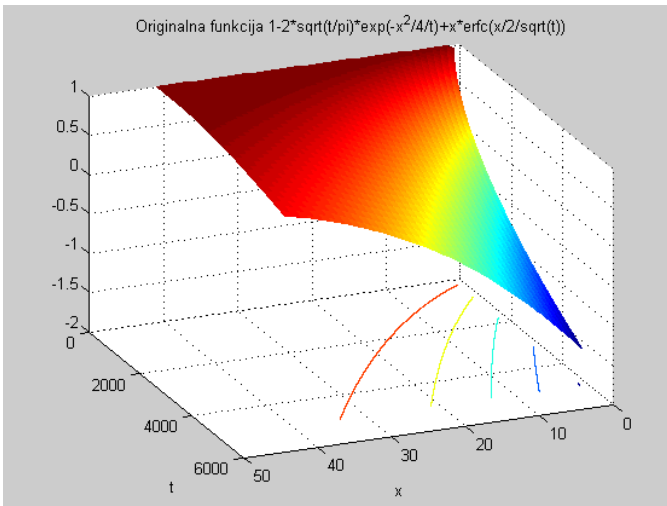
i graničnim uslovima

$$u_x(0,t) = 1,\ \lim_{x\to\infty}|u(x,t)| < \infty,\ t > 0.$$

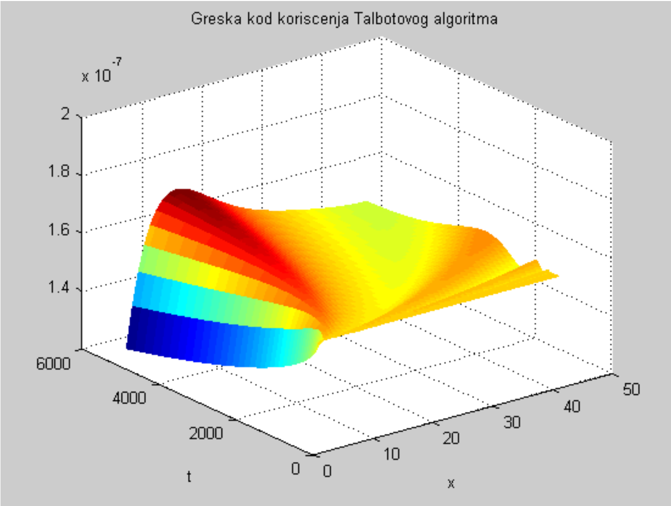
Nakon primenjenog algoritma, dobija se obična diferencijalna jednačina čije je rešenje dato sa:

$$U(x,s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-x\sqrt{s}}}{s^{3/2}}. \tag{1}$$

Inverzija ovog rešenja prikazana je na Sl. 1.



Slika 1. Originalna funkcija.

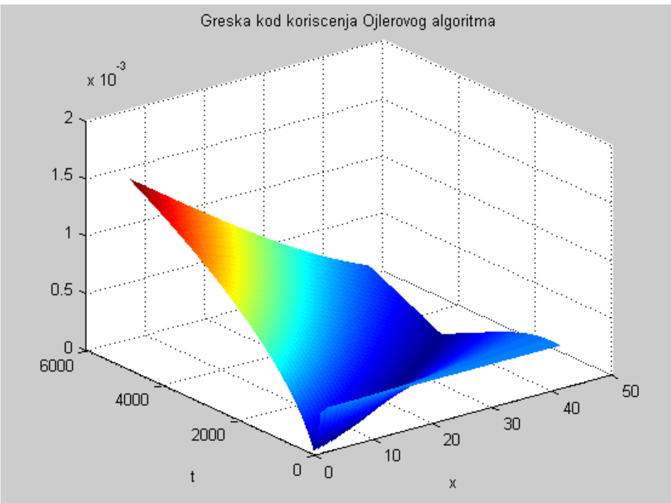


Slika 2. Apsolutna greška kod Talbotovog algoritma.

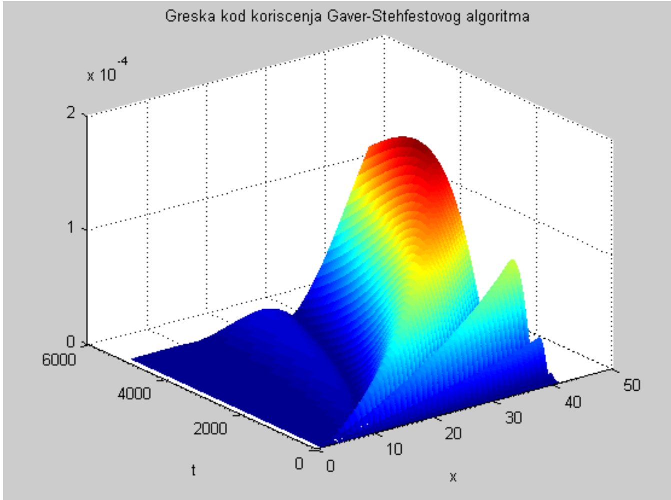
Aproksimativna numerička rešenja za inverznu Laplasovu transformaciju izraza (1) dobijena prethodno navedenim metodama (Talbot, modifikovani Talbot, Gaver-Štefest i Ojler) vizuelno se međusobno poklapaju (s tim što značajnije odstupanje pokazuje modifikovani Talbotov metod). Takođe se vizuelno poklapaju sa originalnim rešenjem sa Sl. 1. Numerička aproksimacija u ovom, i svim ostalim primerima u radu, izvršena je u oblasti $x, t \in [0, 2]$.

U narednom delu, propraćena je apsolutna greška odstupanja aproksimativnog numeričkog rešenja od originalnog za svaku od navedenih metoda. Dobijeni rezultati prikazani su na Sl. 2-5.

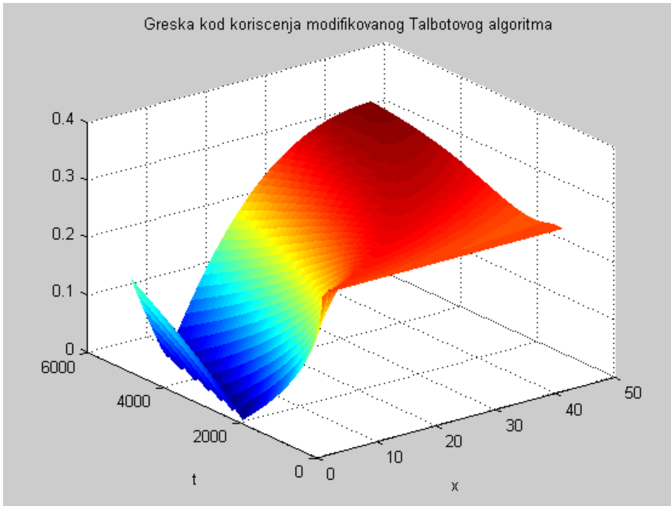
Maksimalna odstupanja kod Talbotovog, Ojlerovog i Gaver-Štefestovog algoritma bila su, respektivno, $1.7596 \cdot 10^{-7}$, 0.0016 i $1.5475 \cdot 10^{-4}$, dok je kod modifikovanog Talbotobog maksimalno odstupanje bilo 0.3531. Ukupna greška odstupanja u navedenoj oblasti za svaku od ovih metoda, respektivno, iznosi: 0.0328, 96.3457, 6.9616 i $5.1557 \cdot 10^{4}$. Prikaz ovih rezultata dat je u tabeli jedan.



Slika 3. Apsolutna greška kod Ojlerovog algoritma.



Slika 4. Apsolutna greška kod Gaver-Štefestovog algoritma.



Slika 5. Apsolutna greška modifikovanog Talbotovog algoritma.

Modifikovani Talbotov algoritam je dao najveću sumu greške, kao i najveću maksimalnu grešku, dok je originalni Talbotov algoritam imao najmanja odstupanja od originalne funkcije.

Po vremenu potrebnom da izvrši izračunavanja, sa korakom vremena $t_s = 0.001$ i brojem evaluacija funkcije $n = 10$, najbrži je bio Gaver-Štefest sa 1.385534 sekunde, pa zatim Talbot i Ojler sa 2.818883 i 3.224568 sekundi. Najbrži je bio modifikovani Talbotov algoritam, jer mu je bio potreban najmanji broj evaluacija $n = 3$, međutim, on daje najveću grešku. Prikaz vremenskih performansi dat je u tabeli 2.

TABELA I. MAKSIMUMI I SUME GREŠKE

Algortitam	**Maksimalna greška**	**Suma greške**
Talbot	$1.7596 \cdot 10^{-7}$	0.0328
Mod. Talbtot	0.3513	$5.1557 \cdot 10^{4}$
Ojler	0.0016	96.3457
Gaver-Štefest	$1.5475 \cdot 10^{-4}$	6.9616

TABELA II. VREME IZVRŠAVANJA (PARABOLIČNA JEDNAČINA)

Algortitam	Vreme izvršavanja (s)	n
Talbot	2.738437	10
Mod. Talbtot	0.726207	3
Ojler	3.183980	10
Gaver-Štefest	1.441601	10

Ove algoritmi su zatim primenjeni i na hiperboličnu jednačinu. Hiperbolična jednačina u ovom primeru je sledeća talasna jednačina:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \; 0 < x < l, \; t > 0 \qquad (2)$$

sa graničnim uslovima

$$y(0,t) = 0, \; t > 0$$

$$y(l,t) = a, \; t > 0$$

i početnim uslovima

$$y(x,0) = 0, \; 0 < x < l$$

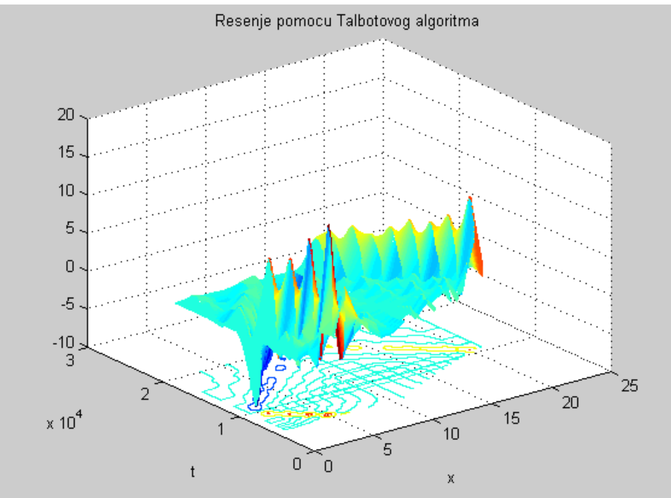
$$y_t(x,0) = 0, \; 0 < x < l.$$

Kada se na jednačinu primeni Laplasova transformacija i reši obična diferencijalna jednačina, dobija se sledeće rešenje čiju inverziju treba da naći kako bi se rešila polazna jednačina:

$$Y(x,s) = -\frac{a}{e^{-ls} - e^{ls}} e^{xs} + \frac{a}{e^{-ls} - e^{ls}} e^{-xs}.$$

Primenjuju se numerički algoritmi izračunavanja na ovaj izraz, a za vrednosti parametara $a = 1$ i $l = 1$.

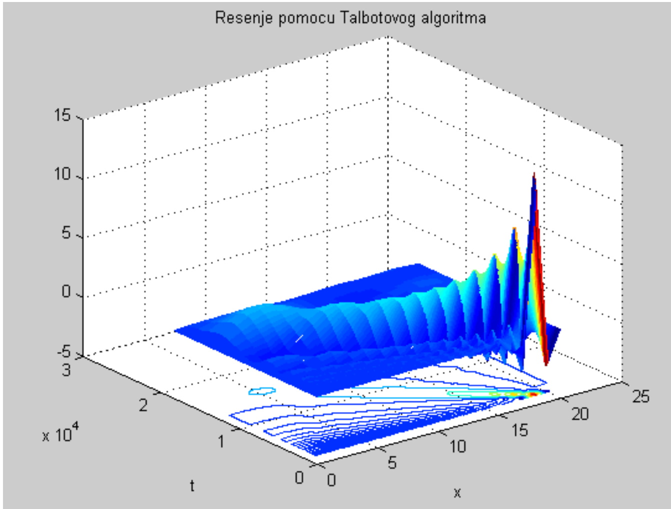
Jedino je Talbotov algoritam dao rešenje (Sl. 6), dok su ostali algoritmi divergirali, zbog velike talasnosti funkcije za date ulazne podatke. Parametri su bili $t_s = 0.0001$ i $n = 44$ (osim kod Talbotvog algortima gde je $n = 45$).



Slika 6. Rešenje talasne jednačine (za l=1) pomoću Talbotovog algoritma.

Za $l = 2$ svi algoritmi daju rešenja jednačine, za vrednost parametara $t_s = 0.0001$ i $n = 12$, osim Talbotovog, algoritma kod kog je računanje vršeno za $n = 13$. Međutim, vizuelno je uočljivo da se ova rešenja ne poklapaju međusobno.

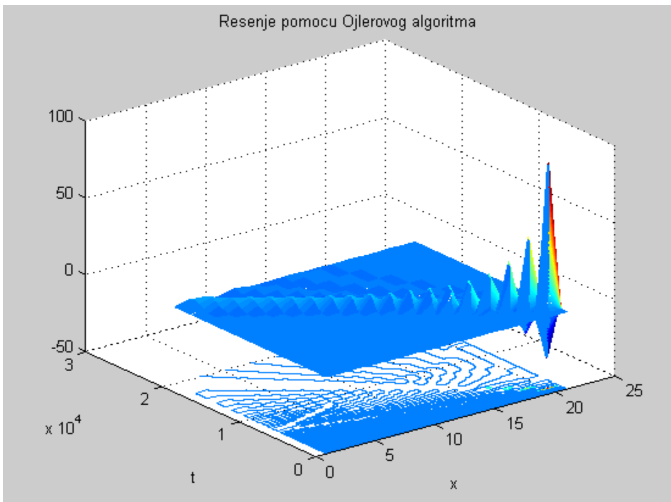
Talbotov (Sl. 7) i Gaver-Štefestov algoritam dali su vizuelno slična rešenja, dok je rešenje pomoću modifikovanog Talbotovog nalikovalo rešenju pomoću Ojlerovog (Sl. 8) algoritma. Međutim, pošto analitički oblik rešenja jednačine nije bio poznat, nije bilo moguće videti koji algoritam pravi najveću grešku. Zato je bilo moguće da se izvrši poređenje vremena potrebnog za izvršavanje algoritma. Prikaz ovih vremena dat je u tabeli 3.



Slika 7. Rešenje talasne jednačine (za l=2) pomoću Talbotovog algoritma.

Poređenja iz tabele 3. su adekvatnije od onih iz tabele 2. pošto su varijacije parametra n manje nego u prethodnom slučaju, u kom je vrednost n bila znatno manja prilikom korišćenja modifikovanog Talbotovog algoritma.

Odavde se vidi da je zapravo Gaver-Štefestov algoritam najbrži, dok modifikovani Talbotov nema značajno veću brzinu izvršavanja u odnosu na preostala dva algoritma.



Slika 8. Rešenje talasne jednačine (za l=2) pomoću Ojlerovog algoritma.

TABELA III. VREME IZVRŠAVANJA (HIPERBOLIČNA JEDNAČINA)

Algortitam	Vreme izvršavanja (s)	n
Talbot	10.986519	13
Mod. Talbtot	9.844468	12
Ojler	11.591874	12
Gaver-Štefest	3.457397	12

Za talasnu jednačinu:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \ x > 0, \ t > 0$$

sa početnim uslovima

$$y(x,0) = 0 \, , \ x > 0$$

$$y_t(x,0) = 0 \, , \ x > 0$$

i graničnim uslovima

$$y(0,t) = f(t) \ \ (f(0)=0),$$

$$\lim_{x \to \infty} u(y,t) = 0 \, ,$$

rešenje obične diferencijalne jednačine glasi:

$$Y(x,s) = F(s) e^{-x\left(\frac{s}{a}\right)}. \qquad (3)$$

Pokušano je da se dobije rešenje ove jednačine, tj. Laplasova inverzija izraza (3) za $F(s) = \frac{1}{s}$ i $F(s) = \frac{1}{s^2}$, za razne vrednosti parametra a. Međutim ni jedan od algoritama nije dao rešenje, zato što ovaj put, za date ulazne podatke, svi algoritmi divergiraju usled prevelike talasnosti funkcije.

IV. ZAKLJUČAK

Talbotov algoritam ima vreme izvršavanja koje je približno vremenu izvršavanja Ojlerovog i modifikovanog Talbotovog algoritma, ali ima najmanju grešku izračunavanja, pa je optimalan sa stanovišta geške. Od sledećeg optimalnog algortima sa stanovišta greške (Gaver-Štefestovog) on ima oko 200 puta manju ukupnu grešku na zadatom intervalu, a za tri reda veličine manju maksimalnu grešku. Takođe, ovaj algoritam jedini nema probleme prilikom izračunavanja rešenja jednačine (2) za slučaj $l = 1$, dok ostali algoritmi nisu u stanju da daju rešenje.

Sa stanovišta vremena, najbrži je Gaver-Šefestov algoritam, koji je zavisno od slučaja 2 do 3 puta brži od ostalih algoritama. Ovo je drugi po optimalnosti algoritam sa stanovišta greške.

Ojlerov algoritam daje veliku grešku, a najveću, odnosno neprihvatljivu grešku daje modifikovani Talbotov algoritam.

Ukoliko vreme izvršavanja nije bitan faktor, treba koristiti Talbotov algoritam, a ako je vreme izvršavanja bitan faktor, treba koristiti Gaver-Štefestov algoritam, pošto je njegova greška dovoljno mala i u granicama prihvatljivosti.

ZAHVALNICA

Studenti žele da se zahvale svom profesoru i mentoru, Tomislavu Šekari na pomoći prilikom izrade ovog rada.

LITERATURA

[1] D. G. Duffy, "Transform methods for solving partial differential equations", 2nd ed., CRC Press, Boca Raton, 2004.

[2] J. L. Schiff, "The Laplace transform: Theory and Applications", Springer, Verlag London, 1999.

[3] С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, "Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложеня", Наука и техника, Минск, 1987.

[4] K. B. Oldham, J. Spanier, "The fractional claculus: Theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order", Academic Press, London, 1974.

[5] J. Abbate, W. Whitt, "A unified framework for numerically inverting Laplace transforms", INFORMS Journal on Computing, vol. 18, no. 4, 2006, pp. 408-421

[6] A. M. Cohen, "Numerical methods for Laplace transform inversion", Springer, New York, 2007.

[7] J. A. C. Weideman, "Computing Special Function via Inverse Laplace Tranform", unpublished

[8] V. Vlašić, "Numerička inverzija Laplace-ove transformacije", 2010, neobjavljen

[9] J. A. C. Weideman, "Optimizing Talbot's contour for the inversion of the Laplace transform", Society for Industrial and Applied Mathematics, Siam J. Numer. Anal., vol. 44, no. 6, pp. 2342-2362

[10] P. P. Valkó, J. Abate, "Numerical inverion of 2-D Laplace transform applied to fractional diffusion equations", Applied numerical mathematics, vol. 53, no. 1, pp. 73-88, 2005.

[11] J. A. C. Weideman, L. N. Trefethen, "Parabolic and hypebolic contours for computing the Bromwitch integral", Mathematics of Computaton, vol. 76, no. 259, pp. 1341-1356, July 2007.

ABSTRACT

Presented in this paper is a methodology for solving second order partial differential equations of functions with two variables using the Laplace transform. Numerical methods have been used in order to obtain the inverse Laplace transform. Algorithms of these methods are presented in the paper. This methodology has been applied in solving practical problems, and a comparison of results has been performed.

Key words – inverse Laplace transform, partial differential equation, Euler's algorithm, Talbot's algorithm, Gaver-Stehfest algorithm, modified Talbot's algorithm

APPLICATION OF NUMERICAL METHODS IN OBTAINING THE INVERSE LAPLACE TRANSFORM FOR SOLVING ONE CLASS OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS USED IN MODELING PHYSICAL PROCESSES

Mladen Lazarević, Zaviša Gordić, Branko Lukić