

# Projektovanje kvantizera Gausovog izvora zasnovano na aproksimaciji funkcije gustine verovatnoće

Nikola Simić, Nikola Vučić

studenti Osnovnih akademskih studija  
Elektronski fakultet, Univerzitet u Nišu  
Niš, Republika Srbija

e-mail: simicnikola90@gmail.com; vucicnikola90@gmail.com

*Sadržaj*—U ovom radu se razmatra deo po deo linearna i deo po deo uniformna aproksimacija funkcije gustine verovatnoće. Za aproksimirane funkcije gustine verovatnoće formira se kompresorska funkcija. Na osnovu ovako formiranih kompresorskih funkcija projektuju se deo po deo linearni i deo po deo uniformni kompadding kvantizer. Projektovanje je izvršeno za Gausov izvor na ulazu kvantizera. Performanse predloženih modela procenili smo na osnovu poređenja sračunatih vrednosti odnosa signal-šum kvantizacije i greške aproksimacije između predloženih modela.

*Ključne reči*-Aproksimacija funkcije gustine verovatnoće; Deo po deo uniformni skalarni kvantizer; Deo po deo linearni skalarni kvantizer; Gausov izvor

## I. UVOD

Najjednostavniji kvantizer je uniformni kvantizer. Za veliki broj kvantizacionih nivoa  $N$  koristi se kompadding kvantizer. Najčešće korišćene kompresorske funkcije su zasnovane na logaritamskom zakonu (zbog svoje praktične primene) [1], standardi 6.712, 6.711]. Optimalni kompadding kvantizer ima performanse bliske optimalnom Lojd-Maksovom kvantizeru, ali zahteva rešavanje integralnih jednačina [2] za Gausovu funkciju gustine verovatnoće, čime kompadding model gubi smisao jednostavnosti zbog koga je uveden [2].

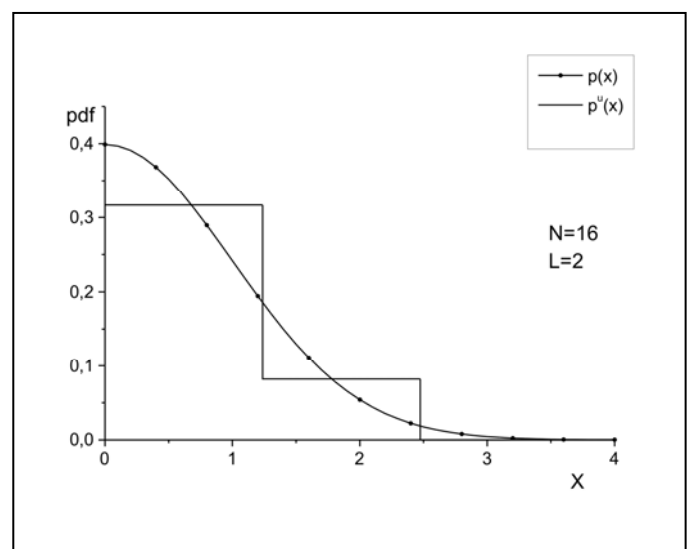
Problem realizacije optimalnog kompadding kvantizera do sada je rešavan korišćenjem deo po deo uniformne aproksimacije [3] [4], a u radu [5] se koriste aproksimacije kompresorske funkcije. U radu [7] razmatrana je aproksimacija funkcija gustine verovatnoće za laplasov izvor. U ovom radu analiziramo tačnost aproksimacija, a pored deo po deo uniformne (DDU), uvodimo i deo po deo linearnu (DDL) aproksimaciju funkcije gustine verovatnoće.

Optimalni komparator za Gausov izvor ima teorijski značaj, ali ne i praktični, te zbog toga u ovom radu vršimo aproksimacije Gausove funkcije gustine verovatnoće (DDU i DDL) i za tako dobijene aproksimacije određujemo kompresorske funkcije koje lako izračunavamo kao i njihove ekspandorske funkcije. Dalje nam je cilj da vidimo koliko ovako projektovani kvantizeri odstupaju od optimalnog kompadding kvantizera.

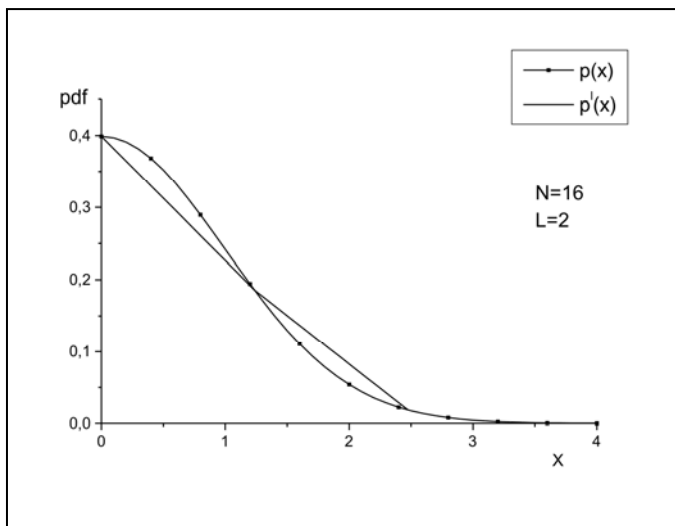
Optimalna kompresorska funkcija daje maksimalni odnos signal-šum kvantizacije (SQNR) za referentnu varijansu ulaznog signala.

U ovom radu se vrši aproksimacije Gausove funkcije gustine verovatnoće pomoću linearnih funkcija (splajn funkcije prvog reda [1], [6]). Za tako dobijene aproksimativne funkcije, određuje se kompresorska funkcija na osnovu koje se projektuje kvantizer i određuju njegove performanse. U zavisnosti od načina dobijanja aproksimativne funkcije, u ovom radu biće razmatrani deo po deo uniformni skalarni kvantizeri (DDLK) i deo po deo linearni skalarni kvantizeri (DDUSK).

Na Sl.1 prikazana je deo po deo uniformna aproksimacija Gausove funkcije gustine verovatnoće dok je na Sl.2 prikazana deo po deo linearna aproksimacija. U oba slučaja broj segmenata na koji se aproksimira funkcija je dva, dok je ukupan broj ćelija u prvom kvadrantu 16. Ujedno, ovo su slučajevi koji daju najslabije performanse od razmatranih, tj. najmanji SQNR, najveću distorziju prekoračenja i najvišu vrednost greške aproksimacije.



Slika 1. Deo po deo uniformna aproksimacija-DDUSK



Slika 2. Deo po deo linearna aproksimacija-DDLSK

## II. KOMPANDING KVANTIZER ZA GAUSOVU FUNKCIJU GUSTINE VEROVATNOĆE

Kvalitet kvantovanog signala se meri pomoću odnosa signal-šum (SQNR) koji se izražava u decibelima, a računa kao:

$$SQNR = 10 \log_{10} \left( \frac{\sigma^2}{D} \right) \quad (1)$$

Ukupna distorzija  $D$  predstavlja zbir granularne distorzije  $D_g$  i distorzije prekoračenja  $D_p$ .

$$D = D_g + D_p \quad (2)$$

Granularna distorzija za bilo koji kvantizer se definiše kao [1]:

$$D_g = \sum_{j=2}^{N-1} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x - y_j)^2 p(x) dx, \quad (3)$$

dok se distorzija prekoračenja definiše na sledeći način [1]:

$$D_p = 2 \int_{x_{\max}}^{\infty} (x - y_N)^2 p(x) dx. \quad (4)$$

pri čemu se reprezentacioni nivo  $y_N$  određuje iz uslova centroida:

$$y_N = \frac{\int_0^{x_{\max}} xp(x) dx}{\int_0^{x_{\max}} p(x) dx} \quad (5)$$

Granularna distorzija kompadding kvantizera je određena Benetovim integralom [1]:

$$D_g = \frac{x_{\max}^2}{3N^2} \int_{-x_{\max}}^{x_{\max}} \frac{p(x)}{[c'(x)]^2} dx \quad (6)$$

Funkcija  $p(x)$  predstavlja funkciju gustine verovatnoće trenutnih vrednosti signala na ulazu skalarnog kvantizera. U ovom radu razmatramo signal na ulazu koji se modeluje Gausovom raspodelom sa:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (7)$$

gde  $\sigma$  predstavlja standardnu devijaciju ulaznog signala. Kako je  $p(x)$  parna funkcija, kvantizer će biti simetričan pa ćemo zbog toga razmatrati samo pozitivan deo realne ose. Maksimalna vrednost SQNR-a se postiže optimalnom kompresorskom funkcijom koja se definiše sa [1]:

$$c(x) = x_{\max} \frac{\int_0^x p^{1/3}(x) dx}{\int_0^{x_{\max}} p^{1/3}(x) dx} \quad (8)$$

## III. KONSTRUKCIJA KOMPANDING KVANTIZERA KORIŠĆENJEM APROKSIMACIJE FUNKCIJE GUSTINE VEROVATNOĆE

U ovom poglavlju će biti detaljno opisani modeli kvantizera DDUSK i DDLSK. Amplitudski opseg oba modela kvantizera podeljen je na po  $L$  segmenata u svakom kvadrantu, dok je svaki segment podeljen na određeni broj ćelija čije se veličine razlikuju. Aproksimativna funkcija gustine verovatnoće za uniforman način aproksimiranja pomoću kojeg se projektuje DDUSK jednaka je:

$$p_i^u(x) = \frac{1}{\Delta} \int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} p(x) dx = \frac{1}{2\Delta} \left( \operatorname{erf}\left(\frac{i\Delta}{\sqrt{2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{(i-1)\Delta}{\sqrt{2}}\right) \right) \quad (9)$$

gde je  $i=1, \dots, L$ , dok  $\Delta$  predstavlja širinu segmenta:

$$\Delta = \frac{x_{\max}}{L} \quad (10)$$

Kompresorska funkcija ovako definisane aproksimativne funkcije gustine verovatnoće je:

$$c_i^u(x) = x_{\max} \frac{\int_0^x (p_i^u(x_i))^{1/3} dx}{\int_0^{x_{\max}} (p_i^u(x_i))^{1/3} dx}, \quad i=1, \dots, L \quad (11)$$

Funkciju pomoću koje se aproksimira funkcija gustine verovatnoće, a na osnovu koje se formira kompresorska funkcija pri projektovanju DDLSK modela definišemo sa [6]:

$$p_i^l(x) = \begin{cases} a_1 x + b_1, x \in [0, x_1^{seg}] \\ \vdots \\ a_i x + b_i, x \in [x_{i-1}^{seg}, x_i^{seg}] \end{cases}, \quad i=1, \dots, L \quad (12)$$

pri čemu su koeficijenti  $a_i$  i  $b_i$  određeni na sledeći način:

$$a_i = \frac{p(x_i^{seg}) - p(x_{i-1}^{seg})}{x_i^{seg} - x_{i-1}^{seg}}, \quad i=1, \dots, L \quad (13)$$

$$b_i = p(x_{i-1}^{seg}) - a_i x_{i-1}^{seg}, \quad i=1, \dots, L \quad (14)$$

Granice segmenata određujemo prema:

$$x_i^{seg} = i \frac{x_{\max}}{L}, \quad i=0, 1, \dots, L \quad (15)$$

Amplituda maksimalnog opterećenja  $x_{\max}$  je definisana sa [2]:

$$x_{\max} = \sqrt{6 \ln N} \left[ 1 - \frac{\ln \ln N}{4 \ln N} - \frac{\ln(3\sqrt{\pi})}{2 \ln N} \right]. \quad (16)$$

gde je  $x_{\max}$  saport regiona, tj. donja granica neograničenog intervala  $(x_{\max}, \infty)$  i važi  $x_{N-1} = x_{\max}$ .

Ukupan broj ćelija u prvom kvadrantu je:

$$\sum_{i=1}^L N_i = \frac{N-2}{2} \quad (17)$$

Kompresorska funkcija ovako definisane aproksimativne funkcije gustine verovatnoće je:

$$c_i^l(x) = x_{\max} \frac{\int_0^x (p_i^l(x_i))^{1/3} dx}{\int_0^{x_{\max}} (p_i^l(x_i))^{1/3} dx}, \quad i=1, \dots, L \quad (18)$$

Granularna distorzija za model DDLSK se dobija zamenom izraza (12), (17) i (18) u (6):

$$D_g^l = \frac{2}{3(N-2)^2} \left( \int_0^{x_{\max}} (p_i^l(x))^{1/3} dx \right)^3, \quad i=1, \dots, L \quad (19)$$

Granularna distorzija za model DDUSK se dobija zamenom izraza (9), (11) i (17) u (6):

$$D_g^u = \frac{2}{3(N-2)^2} \left( \int_0^{x_{\max}} (p_i^u(x))^{1/3} dx \right)^3, \quad i=1, \dots, L \quad (20)$$

Distorzija prekoračenja zavisi samo od broja ćelija kojima se aproksimira funkcija gustine verovatnoće i ne zavisi od broja segmenata aproksimacije. Za modele DDUSK i DDLSK ima jednaku vrednost za isti broj ćelija aproksimacije i dobija se prema:

$$D_p = 2 \cdot \left( \frac{x_{N-1} - y_N}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_{N-1}^2}{2}} + \frac{1}{2} (1 + y_N^2) \operatorname{erfc}\left(\frac{x_{N-1}}{\sqrt{2}}\right) \right) \quad (21)$$

#### IV. NUMERIČKI REZULTATI I DISKUSIJA

Performanse predloženih kvantizera procenjujemo upoređujući dobijene vrednosti SQNR-a i greške aproksimacije modela DDLSK sa odgovarajućim vrednostima izračunatim za model DDUSK. Numerički rezultati dobijeni za vrednosti SQNR-a su prikazani u Tabeli 1, dok rezultati koji predstavljaju vrednosti greške aproksimacije se nalaze u Tabeli 2. Rezultati su prikazani za različiti broj segmenata ( $2L=4$ ,  $2L=8$  i  $2L=16$ ) i za više nivoa kvantovanja ( $N=16$ ,  $N=32$  i  $N=128$ ).

TABELA I. VREDNOSTI SQNR-A PREDLOŽENIH KVANTIZERA

N	L	SQNR <sup>U</sup> [dB]	SQNR <sup>L</sup> [dB]	NOKK [dB]
16	2	19.9328	19.9206	19.7356
	4	20.0999	20.0991	
	8	20.1470	20.1454	
32	2	25.5054	25.3597	25.7562
	4	25.8476	25.7917	
	8	25.9433	25.9317	
64	2	31.1485	30.8089	31.7768
	4	31.6801	31.5486	
	8	31.8357	31.7997	
128	2	36.8488	36.3392	37.7974
	4	37.5611	37.3763	
	8	37.7774	37.7375	

Vrednosti SQNR-a, prikazane u Tabeli 1, dobijene su prema jednačini (1) za jediničnu vrednost varijanse. Na osnovu rezultata prikazanih u Tabeli 1 može se приметiti da se bolji rezultati postižu modelom DDUSK nego modelom DDLSK. Takođe, iz Tabele 1 može se videti da su rezultati SQNR-a dobijeni za aproksimaciju modelom DDUSK na  $L=8$  segmenata veoma bliski vrednostima modela NOKK [1]. Pored toga, realizacija modela DDUSK je znatno jednostavnija nego realizacija modela DDLSK. Kako je bilo očekivano da se modelom DDLSK ostvari viši kvalitet signala nego modelom modelom DDUSK, u radu je razmatrana i srednja vrednost greške aproksimacije kako bi se proverila tačnost dobijenih rezultata za SQNR. Greška aproksimacije modela DDUSK jednaka je:

$$e_i^u = \left| \int_{x_{i-1}^{seg}}^{t_i} [p(x)^{1/3} - p_i^u(x)^{1/3}] dx \right| + \left| \int_{t_i}^{x_i^{seg}} [p(x)^{1/3} - p_i^u(x)^{1/3}] dx \right|, i=1, \dots, L \quad (22)$$

gde  $t_i$  predstavlja tačku preseka između funkcije gustine verovatnoće  $p(x)$  i aproksimativne funkcije  $p_i^u(x)$  u  $i$ -tom segmentu.

Greška aproksimacije modela DDLSK se dobija prema:

$$e_i^l = \int_{x_{i-1}^{seg}}^{x_i^{seg}} [p(x)^{1/3} - p_i^l(x)^{1/3}] dx, i=1, \dots, L \quad (23)$$

Ukupnu grešku aproksimacije dobijamo kao zbir apsolutnih vrednosti grešaka aproksimacije po segmentima, tj.:

$$\delta^u = \sum_{i=1}^L e_i^u \quad (24)$$

$$\delta^l = \sum_{i=1}^L |e_i^l| \quad (25)$$

TABELA II. VREDNOSTI GREŠAKA APROKSIMACIJE PREDLOŽENIH MODELA KVANTIZERA

N	L	$\delta^u$	$\delta^l$
16	2	0.1512	0.0245
	4	0.0736	0.0074
	8	0.0365	0.0021
32	2	0.2346	0.0760
	4	0.1126	0.0226
	8	0.0556	0.0055
64	2	0.3123	0.1366
	4	0.1478	0.0419
	8	0.0726	0.0109
128	2	0.3819	0.1960
	4	0.1786	0.0595
	8	0.0872	0.0144

Prema rezultatima prikazanim u Tabeli 2 može se uočiti da je srednja vrednost greške aproksimacije manja kod modela DDLSK nego kod modela DDUSK. Stoga, nije moguće sa velikom tačnošću tvrditi da je u pogledu ostvarenog SQNR-a model DDUSK efikasniji od modela DDLSK za sve razmatrane kombinacije broja segmenata i nivoa kvantovanja, već je vrednosti SQNR-a potrebno izračunati i prema tačnoj formuli kako bi se prikazao nivo tačnosti dobijenih rezultata, a što će biti predmet budućeg rada.

#### ZAHVALNICA

Autori rada se zahvaljuju prof. dr Zoranu Periću, redovnom profesoru Elektronskog fakulteta u Nišu kao i Lazaru Velimiroviću, Matematički institut SANU, na podršci i korisnim savetima prilikom izrade rada. Istraživanje je vršeno kao deo seminarskog rada u okviru predmeta Kodovanje na 4. godini Osnovnih akademskih studija i deo je šireg istraživanja tima koji pod svojim mentorstvom vodi prof. dr Zoran Perić.

## LITERATURA

- [1] N. S. Jayant and P. Noll, "Digital Coding Of Waveforms, Principles and Applications to Speech and Video," 2nd ed., New Jersey: Prentice Hall, 1984, ch. 4, pp. 115-220.
- [2] S. Na, "Asymptotic formulas variance mismatched fixed-rate scalar quantizer of a Gaussian source", IEEE Trans. Signal Process. , vol. 59, no. 5, pp. 2437-2441, May 2011.
- [3] D. Kazakos, K. Makki, "Robust Companders", Proceedings of the 6<sup>th</sup> WSEAS International Conference on Telecommunications and Informatics, Dallas (Texas), pp. 32-35, 2007.
- [4] J. Nikolić, Z. Perić, D. Antić, A. Jovanović and D. Denić, " Low Complex Forward Adaptive Loss Compression Algorithm and its Application in Speech Coding", *Journal of Electrical Engineering*, vol. 62, no. 1 , pp. 19-24, 2011.
- [5] L. Velimirović, Z. Perić, J. Nikolić, M. Stanković, "Design of compandor quantizer for Laplacian source for medium bit rate using spline approximations", *Facta universitatis*, vol. 25, no 1, pp. 81-92, 2012.
- [6] W. Cheney, D. Kincaid, "Numerical Mathematics and Computing," 6nd ed., Belmont: Thomson Higher Education, 2008, ch. 9, pp. 371-426.
- [7] L. Velimirović, Z. Perić, M. Stanković, N. Simić, N. Vučić, Projektovanje kvantizera Laplasovog izvora zasnovano na aproksimaciji funkcije gustine verovatnoće, *TELFOR*, Beograd, pp. 807-810, novembar 2012.

In this paper both piecewise linear and piecewise uniform approximation of probability density function are performed. For the probability density function approximated in these ways, a compressor function is formed. On the basis of compressor function formed in this way, piecewise linear and piecewise uniform companding quantizer are designed. Design of these companding quantizer models is performed for the Gaussian source at the entrance of the quantizer. The performance estimate of the proposed companding quantizer models is done by determining the values of signal to quantization noise ratio (SQNR) and approximation error for the both of proposed models and also by their mutual comparison.

**DESIGN OF QUANTIZER FOR GAUSSIAN SOURCE  
BASED ON THE PROBABILITY DENSITY FUNCTION  
APPROXIMATION**

Nikola Simić, Nikola Vučić