INFOTEH-JAHORINA Vol. 12, March 2013.

Metodološki okvir stohastičkog modeliranja procesa rizika osiguravajućih društava

Radovanović Sanja/ Mihailović Nenad/ Vasiljević Momčilo
Finansije i računovodstvo - nastava
VIPOS Valjevo
Valjevo, Srbija
sanja.radovanovic@vipos.edu.rs
nenad.mihailovic@vipos.edu.rs
momcilo.vasiljevic@vipos.edu.rs

Radovanović Željko
doktorant
Fakultet političkih nauka
Beograd, Srbija
radovanoviczeljko.valj@yahoo.com
Svetlana Štrbac Savić
nastava
VISER Beograd
Beograd, Srbija
svetlanas@viser.edu.rs

Sadržaj— **S obzirom na razvijen matematički aparat u radu sa stohastičkim diferencijalnim jednačinama i mogućnostima modeliranja fenomena sa nepoznatim faktorima, osiguravajuća društva primenom stohastičke analize mogu modelirati određeni portfolio, izvršiti proračun šteta, njihove vremenske dinamike, ukupne sume i raspodele, kao i verovatnoće gubitka u portfoliu. Sagledavanje procesa rizika kao stohastičkog procesa daje mogućnost osiguravaču da kombinovanjem varijabli koje su u njegovim rukama utiče na smanjenje verovatnoće propasti i na taj način obezbedi stabilno poslovanje, a čija bi praktična primena u potpunosti bila onemogućena bez postojanja adekvatnog softverskog rešenja.**

Ključne reči- informacione tehnologije, rizik, osiguranje, slučajni procesi;

I. UVOD

Procesi rezervi, odštetnih zahteva i tokova gotovine samo su neki od sistema sa slučajnim ponašanjem u osiguranju, tj. čije se buduće ponašanje ne može tačno predvideti, ali se može nešto reći o verovatnoćama njihovih ishoda, ili se može predvideti njihova najverovatnija trajektorija [1]. Složenu dinamičku stvarnost osiguranja možemo aproksimirati, korišćenjem slučajnih ili stohastičkih procesa i na taj način je sagledati i usmeravati shodno postavljenim ciljevima menadžmenta osiguravajuće kompanije. Slučajni procesi predstavljaju dobar oslonac ne samo teoriji već i praksi [2].

Svakako, jedan od najvažnijih procesa u osiguranju predstavlja proces rizika, čije je uspešno kvantifikovanje uslov stabilnosti određenog portfolia osiguravajućeg društva. Stohastička analiza je danas jedna od najmodernijih oblasti matematike, s obzirom na to da poseduje razvijen matematički aparat u radu sa stohastičkim diferencijalnim jednačinama, koje modeliraju fenomene sa nepoznatim faktorima, a koje shvatamo kao da su se slučajno desili [3].

Prilikom stohastičkog modeliranja procesa rizika iznose odštetnih zahteva posmatramo kao slučajne promenljive, u kom slučaju je od posebnog značaja određivanje adekvatne funkcije raspodele, kako za broj odštetnih zahteva tako i za njihove iznose.

U klasičnom procesu rizika odštetni zahtevi su eksponencijalno raspodeljeni, međutim za uspešno modeliranje procesa rizika kod osiguranja požara, nesretnog slučaja, zdravstvenog i drugih vrsta neživotnih osiguranja neophodno je pronalaženje najadekvatnije raspodele za svaku od navedenih vrsta neživotnih osiguranja pojedinačno. Najčešće se moramo odlučiti između različitih funkcija raspodela pri čemu moramo voditi računa da raspodele koje izaberemo moraju modelirati i one najveće do tada zabeležene štete.

Pored primene informatičke i posebno internet tehnologije u svom poslovnom procesu, osiguravajuće kompanije su zahvaljujući informacionim tehnološkim dostignućima razvile čitav niz tehnika identifikacije, merenja i upravljanja rizikom. Razvoj i korišćenje stohastičkog modeliranja procesa rizika bi u praksi bilo praktično ne izvodljivo bez adekvatne primene informatičke tehnologije.

II. KLASIČAN MODEL RIZIKA

Teorija rizika je sinonim za matematiku neživotnog osiguranja u čijem se središtu nalazi modeliranje prispelih odštetnih zahteva na osnovu kojih se određuje visina premije, a u cilju izbegavanja bankrotstva osiguravajuće kompanije. Ona se bavi modeliranjem i proračunom šteta i rizika, njihove raspodele, vremenske dinamike, ukupne sume, kao i verovatnoće propasti odnosno gubitka u portfoliu, itd. Klasičan model se zasniva na sledećim pretpostavkama:

• Zahtevi za isplatu stižu u vremenima $0 < T_1 \leq T_2 \leq T_3 \cdots$, koja zovemo vremena dospeća.

• Šteta koja stiže u vremenu T_i ima iznos X_i. Niz $(X_i)_{i\in N}$ čine nezavisne i jednako raspodeljene slučajne promenljive.

• Procesi $(T_i)_{i\in n}$ i $(X_i)_{i\in N}$ su međusobno nezavisni.

Sada se može definisati proces brojanja broja odštetnih zahteva:

$$N(t) = \max\{i \geq 1 : T_i \leq t\},\ t \geq 0 \tag{1}$$

gde je $N = (N(t))_{t\geq 0}$, proces brojanja. Za fiksirani t>0 slučajna promenljiva N(t) predstavlja broj odštetnih zahteva koji se jave u intervalu [o,t]. Neka je t≥0 i h>0, tako da je N(t+h)-N(t) broj odštetnih zahteva koji se javi u vremenskom intervalu (t, t+h), vremenski period između javljanja dva ili više odštetnih zahteva obeležava se sa V_1, tako da je

$$V_i = T_i - T_{i+1} \tag{2}$$

Kod klasičnog procesa rizika pretpostavlja se da je proces brojanja broja odštetnih zahteva $(N(t))_{t\geq 0}$ Puasonov proces. Sa aspekta osiguravajuće kompanije od posebnog značaja je proces ukupnih šteta do trenutka t. Pojedinačni iznosi zahteva modelirani su nizom nezavisnih i jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$, gde X_i predstavlja iznos *i*-tog zahteva. Ukupan iznos do trenutka t je:

$$S(t) = X_1 + X_2 + \ldots + X_{N(t)} \text{ ili } S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \tag{3}$$

U klasičnom procesu rizika višak osiguravača u nekom fiksnom vremenskom trenutku t>0 je određen sa tri veličine:

1. početnim viškom,
2. iznosom prikupljenih premija do trenutka t,
3. iznosom isplaćenih odštetnih zahteva do trenutka t.

Zanemarujući inflaciju i druge eventualne dinamičke promene u portfoliu, ukupna vrednost šteta u intervalu [0, t] iznosi:

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \tag{4}$$

Pretpostavimo da je $u > 0$ početni kapital osiguravača, te da se premije naplaćuju po konstantnoj stopi $c > 0$, tako da je u intervalu [0, t] na ime premija naplaćeno ukupno *ct*. Prirodno je pitati da li postoji neki vremenski trenutak u kojem do tada naplaćene premije zajedno s inicijalnim kapitalom ne pokrivaju sve do tada ostvarene štete. U tom slučaju bismo govorili o *propasti osiguravača*. Najpre definišemo proces rizika kao:

$$U(t) = u + ct - S(t),\ t \geq 0 \tag{5}$$

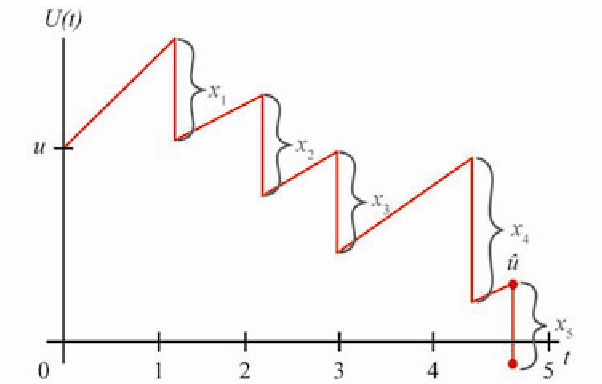
$U(t)$ – kapital (višak) osiguravača u vremenskom trentku t

$u = U(0)$ – inicijalni kapital (početni višak)

c – prihod od premije po jedinici vremena

$S(t)$ – ukupan iznos šteta

Ukoliko je proces U(t) definisan za svako t, tada on predstavlja proces rizika za apsolutno neprekidno vreme. Ukoliko je on definisan samo za određene diskretne vrednosti t, kao t=0,1,2.., tada U(t) predstavlja proces rizika u diskretnom vremenu.



Grafik 1.Realizacija procesa rizika.

Kao što vidimo na grafiku 1, višak $U(t)$ raste po konstantnoj stopi c sve do pojave prve štete u kom trenutku pada za iznos X_1. Potom ponovo raste dok ne padne za X_2, iznos druge štete, i tako dalje. Višak raste i posle četvrte štete do nivoa označenog kao $\hat{u}$ i tada pada za X_5, iznos pete štete, na nivo koji je manji od 0 u vremenu 4.6, koje u ovom primeru predstavlja vreme propasti. Ovako definisan proces zapravo predstavlja tokove gotovine u portfoliu tokom vremena. *ct* predstavlja prilive gotovine tokom vremena dok S(t) predstavlja odlive po osnovu isplate odštetnih zahteva tokom vremena [4].

Za razliku od realne situacije u model su uvedene i sledeće pretpostavke:

1. Odštetni zahtevi se isplaćuju u celosti čim se jave.
2. Na postoji mogućnost kamaćenja početnog viška.
3. Troškovi osiguravača se zanemaruju.

Ključni uslov u teoriji propasti je da je očekivani iznos premija sakupljenih između dolaska dve štete veći od očekivanog iznosa štete, inače će se propasti dogoditi s verovatnoćom 1. Ovaj uslov poznatiji je pod nazivom uslov čistog profita. Zapisuje se kao $c > \lambda m_1$ ili kao $c = (1+\theta)\lambda m_1$ za neki $\theta > 0$, gde $\theta > 0$, predstavlja dodatak (doplatu) za sigurnost, ili faktor opterećenja premije[5].

Na osnovu izloženog možemo uočiti da je glavni problemi teorije rizika: naći realističan i jednostavan model za $N(t)$ i $S(t)$, odrediti njihova teoretska svojstva i asimptotsko ponašanje, naći efikasnu i korektnu metodu njihovog simuliranja ukoliko ne znamo analitički sve izračunati i na osnovu ovih rezultata odrediti premije, rezerve i sl.

III. VEROVATNOĆA PROPASTI

Verovatnoća propasti u beskonačnom vremenu, koja se još naziva i verovatnoća konačne propasti za apsolutno neprekidno vreme, definiše se kao:

$$\psi(u) = P\ (U(t)<0,\ \text{za neki}\ t>0) \qquad (6)$$

Dakle $\psi(u)$ predstavlja verovatnoću da će višak osiguravača iznositi manje od nula u nekom budućem vremenu, odnosno verovatnoća da će isplate po osnovu odštetnih zahteva biti veće od početnog viška uvećanog za naplaćene premije. U suštini može nas interesovati verovatnoća propasti u nekom konačnom vremenskom intervali (o,t) i tu verovatnoću obeležavamo sa $\psi(u,t)$, ili u nekom neograničenom vremenskom intervalu $(0, \infty)$ i tu verovatnoću obeležavamo sa $\psi(u)$. Verovatnoća propasti u konačnom vremenu je data izrazom:

$$\psi(u,t) = P\ (U(t)<0,\ \text{za neko}\ s,\ 0< s \leq t) \qquad (7)$$

Odnosno to je verovatnoća da iznos osiguravačevog viška u konačnom vremenskom intervalu (0,t] bude manja od nule. Sa praktičnog gledišta $\psi(u,t)$ je ponekad interesantnija od $\psi(u)$. To se pre svega odnosi na menadžere osiguravajućih kompanija koji pažljivo prate rizičnost portfelja i reaguju tako što povećavaju premije ukoliko se rizičnost poveća. U tom slučaju, po većini autora, optimalan period (za neživotna osiguranja) za koji se posmatra $\psi(u,t)$ je t=5 godina [6]. Možemo definisati i verovatnoću konačne propasti za diskretno vreme: $\psi_r(u)=P(U(t)<0$, za neko t, t=r, 2r, 3r...). Po ovoj definiciji propast će nastupiti ukoliko je višak manji od nula u nekom od vremenskih trenutaka r, 2r, 3r.

Primetićemo da ukoliko je propast nastupila u smislu definicije za diskretno vreme onda je nastupila i u smislu definicije za neprekidno vremene, tj. ako se desila propast u diskretnom vremenu desila se i u neprekidnom vremenu. Suprotno ne važi i ukoliko posmatramo realizaciju procesa viška za koji je za neki ceo broj n, U(nr)>0 i U((n+1)r)>0, a $U(\tau)<0$ za neko $\tau \in (nr, (n+1)r)$. Ako je U(t)>0 za sve t koji ne pripadaju intervalu (nr, (n+1)r), onda je nastupila propast u smislu definicije za neprekidno vreme, ali po definiciji za diskretno vreme nije došlo do propasti. Dakle važi $\psi_r(u) < \psi(u)$. Međutim kada je r jako mali broj, odnosno kada proveravamo nivo viška jako često, verovatnoća konačne propasti za diskretno vreme je dobra aproksimacija verovatnoće konačne propasti za neprekidno vreme [7].

Osnovni cilj stohastičkog modeliranja procesa rizika je neprekidna kontrola kretanja portfolia osiguravajuće kompanije kroz vreme uz zahtev da portfolio u svakom trenutku bude solventan. Neprekidnu proveru treba uslovno shvatiti, obzirom da u bukvlnom smislu predstavlja neralan uslov. Kao realnom, smatramo proveru portfolia u pogodnim intervalima. Centralno mesto *teorije propasti* zauzima problem minizacije verovatnoće propasti, kao generičkog pokazatelja izloženosti riziku portfolia osiguravajuće kompanije [8]. U tom cilju, osiguravač može kontrolisati nivo početnog viška u, premiju c i dodatak za sigurnost θ i na taj način uticati na veličinu verovatnoće propasti. Takođe, reosiguranje predstavlja jednu od otvorenih opcija ukoliko osiguravač želi da smanji varijabilitet ukupnih šteta. Za očekivati je da će smanjenje varijabilnosti povećati sigurnost osiguravača i na taj način smanjiti verovatnoću propasti.

Verovatnoća preživljavanja, $\phi(u)$ predstavlja verovatnoću da nikada neće doći do propasti za dati nivo početnog viška u, pri čemu važi odnos $\phi(u) = 1 - \psi(u)$ [9].

Konceptu verovatnoće propasti i stohastičkom modelu procesa rizika do nedavno je pridavan isključivo teoretski značaj. Najveće zamerke modelu su što zanemaruje inflaciju, kamatnu stopu, troškove osiguranja i druge eventualne dinamičke promene u portfoliu. Međutim, poslednji radovi iz ove oblasti, kao i odredbe projekta Solventnost II, vratili su konceptu verovatnoće propasti novu aktuelnost.

Jedan od ciljeva projekta Solventnost II je uvođenje sistema merenja solventnosti zasnovanog na riziku, čime se afirmiše pristup opreznosti prilikom merenja stepena izloženosti riziku portfolia osiguravajućeg društva. U delu stuba I ovog projekta, koji obrađuje kvantitativne rizike, propisuje se obaveza određivanja na riziku baziranog kapitala, pre svih ciljnog kapitala, SCR (solvency capital requirement) i minimalnog zatraženog kapitala MCR (minimal capital requirement). Od posebnog značaja je činjenica da njihovo izračunavanje, pored tradicionalnih metoda, zasnovanih na determinizmu, može biti zasnovano i na novom dinamičkom pristupu, baziranom na stohastičnosti i konceptu verovatnoće ostvarivanja štetnog događaja.

Ciljni kapital (SCR) predstavlja iznos kapitala koji osiguravajuća kompanija mora formirati kako bi rizik neizvršenja obaveza svela na prihvatljiv nivo. Ciljni nivo kapitala SCR može biti računat primenom propisane standardne formule ili internog modela karakterističnog za predmetnog osiguravača.

Njegovo izračunavanje se bazira na rešavanju verovatnoće solventnosti na jednogodišnjem nivou, odnosno na bazi jednogodišnje 99,5% vrednosti pri riziku VaR (value at risk). Poslednji rezulatati ukazuju da ciljnom kapitalu (SCR), izračunatom na bazi jednogodišnjeg 99,5% VaR odgovara iznos kapitala koji se dobija računanjem 93% verovatnoće preživljavanja na period od pet godina, odnosno rešavanjem izraza $\phi(u,5) = 0,93$.

U stručnim krugovima je sve više pobornika koji prednost daju metodu verovatnoće propasti/preživljavanja, s obzirom na to da se na ovaj način dobija iznos kapitala koji je zasnovan na petogodišnjem sagledavanju kretanja u portfoliu, čime je opravdanost korišćenja metoda zasnovanog na jednogodišnjem VaR ozbiljno dovedena u pitanje.

IV. ZAKLJUČAK

Videli smo da se portfolio u rukama osiguravača može modelirati na više načina. Sagledavanje procesa rizika kao stohastičkog procesa daje mogućnost osiguravaču da kombinovanjem varijabli koje su u njegovim rukama utiče na smanjenje verovatnoće propasti, kao jednog opšteg pokazatelja izloženosti riziku, i na taj način obezbedi stabilno poslovanje.

Razvoj jednog novog „dinamičkog“ procesa rizika je neophodnost, uslovljena zahtevima osiguravajućih društava suočenim sa bitno izmenjenim poslovnim okruženjem i suočavanjem sa brojnim izazovima i rastućim rizicima, što je doprinelo da se se kapital i solventnost osiguravača u odnosu na preuzete obaveze nađu u fokusu kako akcionara i osiguranika, tako i države i njenih nadzornih organa.

Sa pravom se očekuje da će informacione tehnologije omogućiti širu upotrebu i sveobuhvatnije korišćenje stohastičkog modeliranja procesa rizika, i verovatnoće propasti kao pokazatelja izloženosti riziku određenog portfolia osiguravajućeg društva.

Uključivanje troškova osiguranja, kamatne stope, dividendi, poreza i definisanjem prihoda od premije kao slučajne promenljive samo su neki od mogućih predloga kako se postojeći stohastički modeli rizika mogu unaprediti u cilju što vernijeg modeliranja složene dinamičke stvarnosti portfolia osiguravajućih društava.

LITERATURA

[1] Gupta A.K., Varga T., 2002, *An introduction to actuarial mathematics*, Springer, str.25.

[2] Beichelt F., Fatti P.L., 2002., *Stohastic processes and their aplications*, CRC Press Llc., str. 32.

[3] Rolski T., Schmidli H., Schmidt V., Taugels J.,1999., *Stohastic processes for insurance and finance*, Wiley Series in Probability and Statistics, str. 65.

[4] Kaas R., Govaerts M., Dhaene J., Denuit M., 2008., *Modern actuarial risk theory*, Springer Verlad, str.83.

[5] Bowers G., Hickman J.N., 1997., *Actuarial Mathematics*, The Society of Actuaries, 310str.

[6] Čižek P., Weron R., Hardle W., 2005., *Statistical tools for finance and insurance*, Springer Berlin Heidelberg, 342 str

[7] Dickson David C.M., 2005., *Insurance risk and ruin*, Cambridge Un. Press, 129.str.

[8] Black K., Bielecki T.R., Hipp C., Peng S., Schachermayer W., Frittelli M., 2004., *Stohastic Methods in Finance: Lecture notes in mathematics*, Sringer Berlin Heidelberg, 127.str

[9] Luo Jian-Hua, 2008., Survival probability and ruin probability of a risk model, *Appl. Math, J.Chinese Univ*., Vol. 23, No. 3, str 256.

ABSTRACT

Considering a developed mathematical apparatus in working with differential equations and the possibilities of modeling phenomena with the unknown factors, insurance companies are able to model a certain portfolio by using stochastic analysis, they can calculate the damages, their timing, total sum and distributions as well as the probability of loss in portfolio. Considering a risk process as a stochastic one, it gives the insurer an opportunity to reduce the ruin probability and thus ensure stable business by combining the existing variables, whose practical application would be completely impossible without the existence of an adequate software solutions.

Radovanovic Sanja, Radovanovic Željko, Mihailović Nenad, Vasiljević Momčilo, Svetlana Štrbac Savić