

# Verifikacija metode za određivanje strujne raspodele u zemlji

Karolina Kasaš-Lažetić, Miroslav Prša, Miodrag Stojadinović

Departman za energetiku, elektroniku i telekomunikacije  
Fakultet tehničkih nauka  
Novi Sad, R. Srbija  
[kkasas@uns.ac.rs](mailto:kkasas@uns.ac.rs), [prsa@uns.ac.rs](mailto:prsa@uns.ac.rs), [micko.sca@gmail.com](mailto:micko.sca@gmail.com)

Nikola Mučalica

»Energotehnika – Južna Bačka«  
Novi Sad, R. Srbija  
[nikola.mucalica@entjuba.rs](mailto:nikola.mucalica@entjuba.rs)

*Sadržaj*— Metoda koju su autori ovog rada razvili za određivanje strujne raspodele u homogenom i dvoslojnom zemljištu je prikazana u njihovim prethodnim radovima. U cilju dodatne verifikacije razvijene metode i dobijenih rezultata, isti problem je rešavan primenom dodatne tri metode.

Prva od njih je numerička metoda konačnih elemenata, koju koristi programski paket COMSOL, dok su druge dve analitičke metode za rešavanje odgovarajuće diferencijalne jednačine.

Verifikacija izračunatih rezultata je obavljena za četiri različite specifične otpornosti zemlje i rezultati poređenja su prikazani u ovom radu, propraćeni odgovarajućom diskusijom.

Prema očekivanjima, rezultati dobijeni metodom konačnih elemenata su se u potpunosti poklapali sa metodom koju su razvili autori, dok su se rezultati dobijeni primenom druge dve metode poklapali samo pri značajnom površinskom efektu.

*Ključne riječi*- *Određivanje strujne raspodele u zemlji; metoda konačnih elemenata; analitičke metode rešavanja diferencijalne jednačine*

## I. UVOD

Prilikom prenosa električne energije do krajnjih korisnika i njene distribucije među njima usled nepredviđenih i nepoželjnih događaja, može da dođe do zemljospoja i da se struja delimično uspostavi i kroz zemlju. Da se ne bi ugrozila bezbednost ljudi, uređaja i opreme, kao i da bi se odredili optimalni elementi prenosnog sistema, veoma je bitno da se zna raspodela struje u zemlji.

Strujnom raspodelom u zemlji se inženjeri bave godinama. Na žalost, često je u praksi primena približnih, empirijskih formula davala pogrešne rezultate, posebno ako struje u zemlji nisu bile čisto prostoperiodične, već su sadržavale značajan broj viših harmonika. Najbolji prikaz do sada korišćenih metoda je dat u literaturi [1]. Da bi se izbegli nedostaci približnih metoda, celom problemu se pristupilo sa pozicija elektromagnetike, odnosno, opisivanjem stvarnih događanja preko elektromagnetskih polja.

Da bi se raspodela struje u zemlji opisala na najbolji mogući način, autori su razvili program, koji je, zajedno sa rezultatima, prikazan u radovima [2]-[5].

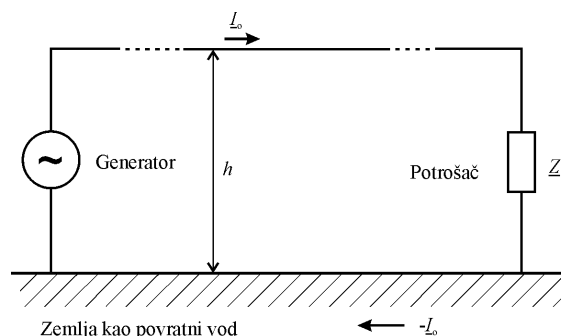
Rezultati primene ovog programa su delimično verifikovani tokom dosadašnjeg rada autora, ali je cilj ovog rada da se sveobuhvatno porede rezultati dobijeni primenom različitih metoda.

Za prikaz problema koji se analizira, koristi se model prikazan na Sl.1. Sistem se sastoji od nadzemnog voda koji se proteže iznad površine zemlje, paralelno sa njom, na visini  $h$ , i zemlje koja predstavlja povratni provodnik.

Analiza je izvršena uz pretpostavku da povratna struja postoji u beskonačnom poprečnom preseku zemlje, pri čemu je, usled površinskog efekta u zemlji i uticaja nadzemnog voda, efekta blizine, raspodela struja neravnomerna. Intenzitet vektora gustine struje ima maksimalnu vrednost ispod nadzemnog voda, koja zatim, sa povećanjem rastojanja u svim pravcima ravni normalne na pravac provodnika, opada. Maksimalna vrednost intenziteta vektora gustine struje, kao i celokupna strujna raspodela, zavise od sledećih parametara: od visine na kojoj se nalazi nadzemni vod  $h$ , učestanosti jačine struje  $f$ , permeabilnosti  $\mu$  i specifične provodnosti zemlje  $\sigma$ .

Pri proračunu, pretpostavljeno je, takođe, da je zemlja homogena, tj. da je specifična otpornost zemlje konstantna. Ova pretpostavka može da se koristi kada se zemlja posmatra kao povratni vod, dok bi pri proračunu raspodele jačine struje nastale usled zemljospoja, lokalna nehomogenost specifične otpornosti zemlje, morala da se uzme u obzir.

Kako se ista slika strujne raspodele u zemlji ponavlja u ravnima normalnim na pravac provodnika, ceo problem može da se tretira kao dvodimenzionalan.



Slika 1. Model sistema za određivanje strujne raspodele u zemlji.

## II. TEORIJSKA OSNOVA

Određivanje strujne raspodele u zemlji se svodi na rešavanje osnovne diferencijalne jednačine u izabranom, cilindričnom koordinatnom sistemu

$$\frac{\partial^2 \underline{J}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \underline{J}_z}{\partial r} - \underline{k}^2 \underline{J}_z = 0, \quad (1)$$

gde je

$$\underline{k}^2 = \frac{j\omega\mu\sigma}{\pi} \arccos \frac{h}{r}. \quad (2)$$

Kao što je pokazano u [2] i [3], kao rešenje (1), zavisnost intenziteta vektora gustine struje od rastojanja  $r$  se dobija u obliku modifikovane Beselove funkcije nultog reda druge vrste,

$$\underline{J}_z(r) = \underline{C} K_0(kr). \quad (3)$$

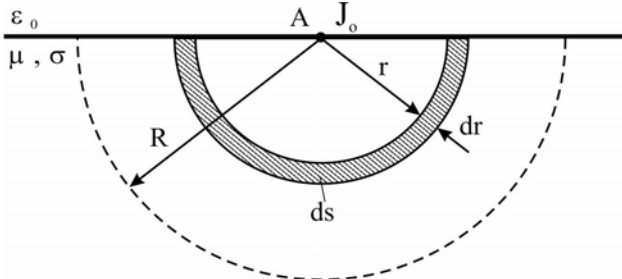
U gornjoj jednačini je  $\underline{C}$  kompleksna konstanta, čija se vrednost određuje iz uslova da je ukupna jačina struje jednaka fluksu vektora gustine struje kroz poprečni presek zemlje,

$$\underline{I}_0 = \int_{S_z} \underline{J} \cdot d\vec{S}. \quad (4)$$

Za ovaj način rešavanja problema je razvijen računarski program u programskom jeziku FORTRAN, čiji su rezultati prikazani u [2] i [3].

Na istom modelu je proverena i druga mogućnost određivanja strujne raspodele u zemlji, potpuno numeričkim postupkom, metodom konačnih elemenata. Ponovo je rešavana diferencijalna jednačina (1), uz pretpostavku da je vektor gustine struje na velikom rastojanju ( $R \rightarrow \infty$ ) od tačke u kojoj struja ulazi u zemlju (tačka A na Sl. 2.), jednak nuli.

Taj uslov mora da bude dovoljno tačan za sve četiri različite specifične otpornosti zemlje koje su posmatrane, odnosno, mora da važi i za velike vrednosti specifične otpornosti, kada je površinski efekat manje izrazit. Osim toga, kao neophodan uslov se ponovo koristi izraz (4). Da bi ceo proračun bio dovoljno tačan, poprečni presek zemlje treba da bude podeljen na dovoljan broj konačnih elemenata, trouglova,



Slika 2. Uz određivanje konstante  $J_0$ .

pri čemu gustina mreže mora da opada sa povećanjem rastojanja, jer su tada prostorne promene intenziteta vektora gustine struje mnogo sporije. Mreža, naravno, mora da bude veoma gusta u neposrednoj blizini tačke u kojoj struja ulazi u zemlju.

Osnovna ideja za treći i četvrti način rešavanja problema je nastala posmatranjem teorijskog modela prikazanog u [6]. Na razdvojnoj površi provodnika (zemlja) i izolatora (vazduh), u provodniku, postoji homogeno strujno polje vektora gustine struje  $J_0$  i to polje opada eksponencijalno sa dubinom provodnika,

$$J_z(y) = J_0 e^{-ky}, \quad (5)$$

gde je koeficijent  $k$  dat izrazom

$$k = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}.$$

U ovom slučaju jednačina (5) mora da bude modifikovana, jer intenzitet vektora gustine struje nije isti na celoj površi provodnika, već se smanjuje od tačke ispod provodnika, (tačka A na Sl. 2.) u svim pravcima dvodimenzionalno prikazanog modela. Zbog toga je problem definisan u cilindričnom koordinatnom sistemu, a zavisnost intenziteta vektora gustine struje od rastojanja je dat izrazom,

$$J_z(r) = J_0 e^{-kr}. \quad (6)$$

Nepoznata konstanta  $J_0$  može da se odredi na dva načina.

Prvi način je da se vrednost  $J_0$  preuzme iz jedne od prve dve metode, očekujući da će rezultati biti utoliko tačniji, ukoliko je površinski efekat izrazitiji, odnosno, pri manjim vrednostima specifične otpornosti zemlje.

Drugi način podrazumeva određivanje konstante  $J_0$  pomoću izraza (4). U tom slučaju integracija intenziteta vektora gustine struje se vrši po elementarnim površima  $dS = r\pi dr$ , prikazanim šrafirano na Sl. 2.

Integracija se vrši od poluprečnika  $r = 0$  (tačka A na Sl. 2.) do  $r = R$ , gde je  $R$  dovoljno veliko rastojanje od tačke maksimalne vrednosti intenziteta vektora gustine struje,

$$I_0 = \int_S \underline{J} \cdot d\vec{S} = \int_S J dS = \int_0^R J_z(r) r \pi dr = J_0 \pi \int_0^R r e^{-kr} dr. \quad (7)$$

Rešavanjem integrala (7) dobijena je konstanta  $J_0$ ,

$$J_0 = \frac{I_0}{\pi \left[ \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k} e^{-kR} \left( R + \frac{1}{k} \right) \right]}.$$

Na taj način, konačno, zavisnost intenziteta vektora gustine struje od rastojanja  $r$ , ima oblik,

$$J(r) = \frac{I_0}{\pi} \frac{e^{-kr}}{\left[ \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k} e^{-kR} \left( R + \frac{1}{k} \right) \right]} \quad (8)$$

Na osnovu iskustva stečenog tokom testiranja prve metode, veličina  $R$  je definisana kao desetostruka dubina prodiranja elektromagnetskog polja u zemlju,

$$R = 10\delta = 10 \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}.$$

### III. DOBIJENI REZULTATI

Raspodela struje u zemlji je određena na sva četiri načina, uzimajući da je jačina struje kroz zemlju čisto realna veličina,  $I_0=1$  A. Pošto je ceo problem linearan, takav izbor jačine struje neće uticati na oblik krivih kojima su, grafički, rezultati prikazani.

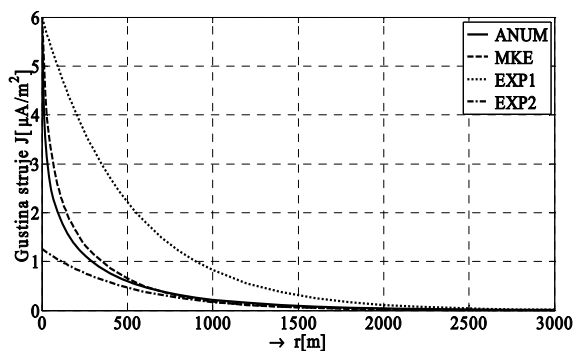
Proračun strujne raspodele pomoću sve četiri opisane metode je bio izveden za četiri različite specifične otpornosti zemlje,  $\rho=50 \Omega m$ ,  $\rho=250 \Omega m$ ,  $\rho=1000 \Omega m$  i  $\rho=2500 \Omega m$ , koje su neke tipične vrednosti za zemljišta različitog sastava. U svim tim proračunima se smatralo da je zemlja homogena. Svi proračuni su rađeni za frekvenciju  $f=50$  Hz.

Korišćenje prve pomenute metode, opisane u [1], ne zahteva nikakve posebne uslove i praktično nikakve posebne performanse računara, kako u pogledu brzine, tako ni u pogledu korišćene memorije.

Da bi se primenila metoda konačnih elemenata neophodno je da se prethodno odredi rastojanje  $R$ , definisano izrazom (9), da bi se, na taj način, definisali granični uslovi. Ustanovljeno je da su razlike u rezultatima manje od 1 % već pri izboru da je  $R=3\delta$ , pa je uslov (9) bio smanjen na tu vrednost, da bi potreban broj elemenata mreže formirane za proračun bio što manji. Poprečni presek zemlje, do poluprečnika  $R$ , je izdijeljen na skoro 200.000 trougaonih elemenata, što pred računar postavlja prilične zahteve u pogledu njegovih performansi.

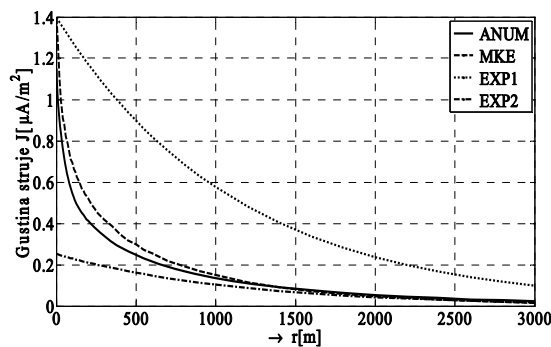
Treći i četvrti način određivanja strujne raspodele u zemlji su takođe zahtevali definisanje rastojanja  $R$ , koje je, u tim slučajevima, ostalo isto kao što je prikazano izrazom (9). Ni ove dve metode nisu zahtevale posebne performanse računara.

Usporedni rezultati proračuna, dobijeni korišćenjem sve četiri metode, za četiri različite vrednosti specifične otpornosti zemlje, prikazani su grafički na Sl. 3 - Sl. 6. Pri tome su krive dobijene prvom metodom obeležene sa ANUM (analitičko-numerička metoda), druge krive obeležene kao MKE (metoda konačnih elemenata) predstavljaju rezultate dobijene primenom druge metode, dok treća i četvrta kriva obeležene kao EXP1 i EXP2, predstavljaju zavisnost intenziteta vektora gustine struje u funkciji rastojanja  $r$  primenjujući treću i četvrtu metodu respektivno.

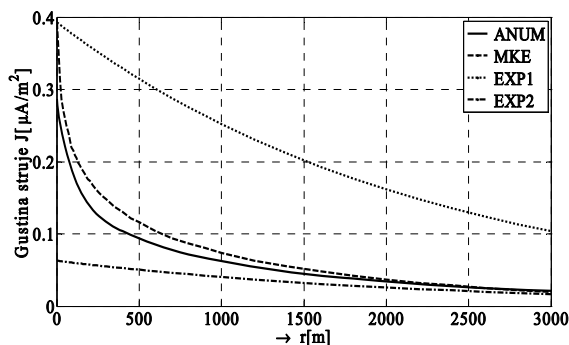


Slika 3. Zavisnost  $J(r)$  za  $\rho=50\Omega m$ .

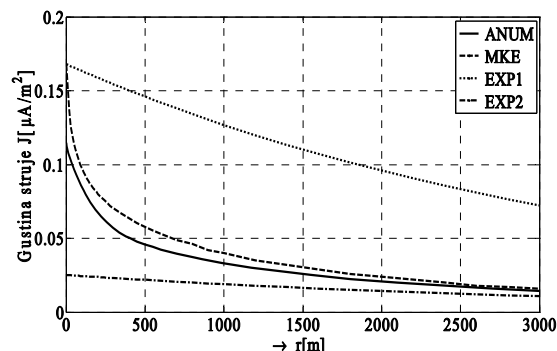
(9)



Slika 4. Zavisnost  $J(r)$  za  $\rho=250\Omega m$ .



Slika 5. Zavisnost  $J(r)$  za  $\rho=1000\Omega m$ .



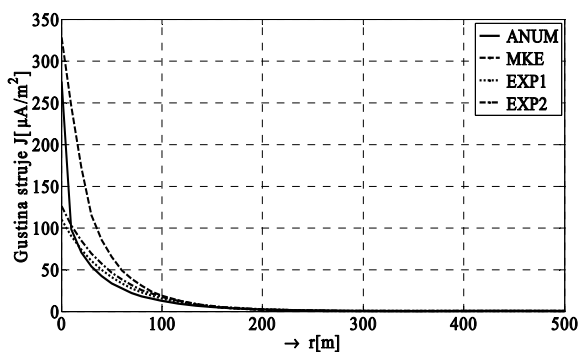
Slika 6. Zavisnost  $J(r)$  za  $\rho=2500\Omega m$ .

Sa prethodnih slika se vidi da se rezultati dobijeni prvom i drugom metodom u velikoj meri poklapaju za sve vrednosti specifične otpornosti zemlje. Odstupanja koja se javljaju su posledica, pre svega, numeričkih grešaka, prisutnih kod obe metode, posebno neposredno ispod provodnika.

Tačnost metode konačnih elemenata je direktno povezana sa brojem konačnih elemenata, pri čemu se, za domene u kojima se očekuju brže promene tražene veličine, formira gušća mreža, ali su i dalje greške tu najveće, pogotovo ako veličina tako brzo opada kao u ovom slučaju.

Aproksimacija raspodele struje eksponencijalnom funkcijom (metode 3 i 4), kao što se i očekivalo, predstavlja dobar način prikazivanja događanja tek u slučaju izrazitog površinskog efekta. U slučaju male specifične otpornosti zemlje i visoke frekvencije i takvim aproksimacijama se dobijaju rezultati koji mogu da se porede sa rezultatima dobijenim pomoću prve dve metode. Pri većim vrednostima specifične otpornosti zemlje, kada je površinski efekat mnogo manje izrazit, rešenja sve više odstupaju od pravih.

Da bismo se uverili u ispravnost gore navedenih zaključaka i komentara, ceo proces izračunavanja strujne raspodele je ponovljen za još jednu frekvenciju,  $f=5000$  Hz, što odgovara specifičnoj provodnosti zemlje,  $\rho=0,5 \Omega\text{m}$ , koja ne postoji u praksi i rezultati su prikazani na Sl.7.



Slika 7. Zavisnost  $J(r)$  za  $f=5000\text{Hz}$ .

Kao što se očekivalo, zbog izrazitog površinskog efekta, poklapanje rezultata za sve četiri primenjene metode je znatno bolje nego u prethodnim slučajevima.

#### IV. ZAKLJUČAK

Kombinovana analitičko-numerička metoda i metoda konačnih elemenata su dale veoma dobru sliku raspodele struje u zemlji. Dobijeni rezultati prikazuju uticaj površinskog efekta i promenu njegove izrazitosti u zavisnosti od specifične otpornosti zemlje. Na osnovu dobijenih rezultata, upoređujući ih sa modelima koji se češće primenjuju, u kojima se stanja u zemlji opisuju pomoću koncentrisanih parametara [4], može da se zaključi da su prve dve metode, opisane u ovom radu, mnogo preciznije, pošto uzimaju u obzir sve fizičke veličine koje se javljaju u zemlji.

Prednost prve metode nad drugom je i da ona ne postavlja nikakve posebne zahteve u pogledu performansi računara, a ceo proces računanja traje izuzetno kratko.

Treći i četvrti način određivanja strujne raspodele u zemlji, prikazom strujne raspodele eksponencijalnom funkcijom, su pokazali da su efikasni samo pri izrazitom površinskom efektu, dok inače ne predstavljaju dobru aproksimaciju problema.

#### ZAHVALNICA

Rad predstavlja deo istraživanja na projektu broj TR32055, finansiranim od strane Ministarstva za nauku i tehnološki razvoj Srbije, 2011-2014.

#### LITERATURA

- [1] Y.J. Wang and S.J. Liu, "A review of methods for calculation of frequency-dependent impedance of overhead power transmission lines." Proc. Natl. Sci. Council ROC(A), vol. 25, no. 6, pp. 329-338, 2001.
- [2] M. Prša, K. Kasaš-Lažetić, "Analitičko numerički metod za određivanje strujne raspodele u zemlji", Zbornik radova međunarodnog naučno-stručnog simpozijuma Infoteh-Jahorina 2008, Vol 7, Ref D-4, pp 315-318, mart 2008.
- [3] M. Prša, K. Kasaš-Lažetić, "An accurate determination of current distribution within the earth", Facta Univ. Ser.: Elec. Energ., vol. 21, No. 1, pp. 83-90., April 2008.
- [4] K. Kasaš-Lažetić, M. Prša, N. Mučalica, "Poduzna otpornost homogenog i dvoslojnog zemljišta", Sedmo savetovanje o elektrodistributivnim mrežama Srbije i Crne Gore, CIRED, Vrnjačka Banja, , Stručna komisija 1, R-1.03. septembar, 2010.
- [5] Mučalica N., Prša M., Kasaš-Lažetić K., "Inductance per unit length of homogeneous and two-layer ground", XI Međunarodni naučno-stručni simpozijum Infoteh-Jahorina 2012, , Vol 11. Ref ENS 1.9 pp. 108-111. mart 2012.
- [6] B. Popović, "Elektromagnetika", Beograd: Građevinska knjiga, pp. 263-265, 1986.

#### ABSTRACT

The method developed for determination of current distribution inside the homogeneous and two-layer ground was presented in our previous papers. In order to additionally verify the method and obtained results, the same problem was calculated applying three other methods.

The first applied method was numerical FEM method used by COMSOL computer program package, while the two others were analytical solutions of appropriate differential equation.

Verification of calculated results was performed for four different ground resistivities and the results comparison is presented in this paper, together with an appropriate discussion.

As expected, FEM results match the results obtained applying developed method, while the results of other two methods match the developed method results only when significant skin effect is present.

#### VERIFICATION OF THE METHOD FOR CURRENT DISTRIBUTION INSIDE THE GROUND DETERMINATION

Karolina Kasaš-Lažetić, Miroslav Prša, Miodrag Stojadinović, Nikola Mučalica