

# Dinamičko naprezanje sabirnica u razvodnim postrojenjima

Mileta Žarković, Milenko Đurić

Energetika/Katedra za elektroenergetske sisteme  
Elektrotehnički fakultet  
Beograd, Srbija  
mileta@etf.rs, mdjuric@etf.rs

*Sadržaj*—U ovom radu analizirano je dinamičko naprezanje sabirnica u razvodnim postrojenjima. Predstavljen je matematički model naprezanja sabirnica. U jednačine statičkog naprezanja sabirnica uvrštene su promenljive elektromagnetske sile generisane od struja trolnog kratkog spoja. Za rešavanje takvih jednačina korišćena je numerička metoda konačnih razlika. U radu su prikazani rezultati koje generiše metoda konačnih elemenata koja je primenjena upotrebom programskog alata MATLAB. Rezultati predstavljaju pomeraje bilo koje tačke u poprečnom preseku sabirnice i maksimalna naprezanja. Cilj rada je provera postojećih formula za naprezanje sabirnica, kako bi se sprečile greške u njihovom projektovanju.

*Ključne riječi*—sabirnice; dinamičko naprezanje; metoda konačnih razlika; metoda konačnih elemenata

## I. UVOD

Standardna provera krutih sabirnica na mehaničko naprezanje je statičkog karaktera. Elektromagnetska sila koju generiše struja kratkog spoja je promenljiva u vremenu. Usled promenljive sile javlja se i promena deformacija u toku vremena. Potrebno je odrediti maksimalnu defromaciju i nju koristiti za dimenzionisanje, projektovanje, sabirnica [1]. Zato je potrebno izvršiti i dinamičku proveru naprezanja sabirnica. Ta provera se u praksi vrši indirektno preko sopstvene učetsanosti mehaničkih oscilacija grede, sabirnice. Frekvencija slobodnih oscilacija uklještene grede može se odrediti iz diferencijalne jednačine kretanja grede [2]:

$$m_e \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + k_1 \cdot \frac{dx}{dt} + k_2 \cdot x = 0 \quad (1)$$

U jendačini (1)  $m_e$  je ekvivalentna masa grede,  $k_1$  je koeficijent prigušenja,  $k_2$  je koeficijent elastičnosti, krutosti i  $x$  je deformacija. Ovako posmatrane oscilacije su slobodne oscilacije grede, odnosno oscilacije na koje ne deluju spoljašnje sile. Zato je sa desne strane znaka jednakosti nula. Ako se umesto nule uvrsti izraz za elektromagnetnu silu,  $F(t)$  dobiće se diferencijalna jednačina iz koje se može odrediti dinamičko naprezanje grede:

$$m_e \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + k_1 \cdot \frac{dx}{dt} + k_2 \cdot x = F(t) \quad (2)$$

Diferencijalna jednačina (2) predstavlja prinudne prigušene oscilacije. Izraz za elektromagnetsku silu je komplikovan te se relacija (2) može rešavati samo numerički. Za numeričko rešavanje relacije (2) primenjena je metoda konačnih razlika [3]. Da bi se odredio pomeraj, deformacija bilo koje tačke u poprečnom preseku grede koristi se metoda konačnih elemenata. Na osnovu tako dobijenih rezultata moguće je odrediti maksimalnu deformaciju grede i kritično dinamičko naprezanje koje se može uporediti sa kritičnim statičkim naprezanjem.

## II. METODA KONAČNIH RAZLIKA

Metoda konačnih razlika spada u metodu integracije korak po korak. Vremenski interval za koji se traži odgovor sistema deli se na određen broj podintervala  $\Delta t$ . Uticaji u trenutku na kraju podintervala  $\Delta t$  izračunavaju se pomoću uticaja na početku tog podintervala. Formira se rekurentni obrazac  $S_{t+\Delta t} = f(S_t)$  i određuje se kompletan odgovor sistema. Vremenski interval  $\Delta t$  se bira tako da omogući predstavljanje dijagrama dinamičkog opterećenja i ispuni uslov stabilnosti numeričkog postupka. Postupak je numerički stabilan ako konvergira nezavisno od izbora vremenskog interval integracije  $\Delta t$ . Numerički postupak konvergira ako se razlika između uzastopnih rešenja iterativnog numeričkog postupka sukcesivno smanjuje.

Izraz za prvi i drugi izvod preko konačnih vrednosti funkcije (3) se uvrštava u izraz za dinamičku ravnotežu (4), diferencijalna jednačina drugog reda, za proizvoljni trenutak  $t_i$ :

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_i \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta t} \quad (3)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta t^2}$$

$$m \cdot \ddot{y}_i + c \cdot \dot{y}_i + k \cdot y_i = F_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

Pretpostavljajući da su poznate vrednosti funkcije u trenucima  $t_i$  i  $t_{i-1}$ , jedina nepoznata veličina je  $y_{i+1}$  i izračunava se iz izraza:

$$y_{i+1} = \frac{1}{a_1}(a_2 y_i + a_3 y_{i-1} + F_i) \quad (5)$$

$$a_1 = \frac{m}{\Delta t^2} + \frac{c}{2 \cdot \Delta t}; a_2 = \frac{2 \cdot m}{\Delta t^2} - k; a_3 = \frac{c}{2 \cdot \Delta t} - \frac{m}{\Delta t^2}$$

Na osnovu navedenih jednačina izračunavaju se početne vrednosti funkcije  $y_0$  i  $y_1$  i formira se iterativni postupak za rešavanje relacije prinudnih prigušenih oscilacija grede. Potrebno je rešiti jednačine za kretanje sabirnica u sva tri smera koordinatnog sistema i odrediti uglove uvijanja, torzije, ako oni postoje. Da bi se postavila diferencijalna jednačina potrebno je definisati matricu masa, matricu prigušenja, matricu krutosti i matricu opterećenja. Ovakav sistem diferencijalnih jednačina se realizuje preko matrica uz pomoć metoda konačnih elemenata.

### III. METODA KONAČNIH ELEMENATA

Metoda konačnih elemenata spada u metode numeričke analize. Osnovne zavisnosti između geometrijskih veličina, dimenzije tela ili pomeranja, i fizičkih veličina, sila i napona, u mehanici kontinuuma uspostavljaju se za element diferencijalno malih dimenzija [4]. Na taj način se dobijaju diferencijalne, integralne ili integro-diferencijalne jednačine koje uz skup konturnih i početnih uslova definišu odgovarajući zadatak. Međutim, mali broj praktičnih problema ima rešenja u zatvorenom obliku pa je potrebno odrediti približno rešenje. Metoda konačnih elemenata spada u metode diskretne analize. Zasniva se na fizičkoj diskretizaciji razmatranog domena. Umesto elementa diferencijalno malih dimenzija razmatra se deo domena konačnih dimenzija, poddomen ili konačni element. Kontinuum sa beskonačno mnogo stepeni slobode, zamenjuje se diskretnim modelom međusobno povezanih konačnih elemenata sa konačnim brojem stepeni slobode [5]. Stepennost slobode podrazumeva promenu, pomeraj, jedne koordinate ili promenu ugla uvijanja u jednoj ravni uvijanja. Tada se diferencijalne ili integralne jednačine sistema svode na algebarske. Algoritam sprovođenja metode sastoji se od sledećih koraka:

1. Diskretizacija kontinuuma izabranim tipom konačnih elemenata, čiji se skup za ceo domen naziva mreža konačnih elemenata. Konačni elementi su međusobno povezani na svojoj konturi u tačkama koji se nazivaju čvorovi.

2. Izbor interpolacionih funkcija pomoću kojih se opisuje stanja unutar konačnog elementa.

3. Izračunavanje karakteristika elementa, odnosno formiranje relacija između parametara u čvorovima koji predstavljaju osnovne nepoznate veličine.

4. Formiranje algebarskih jednačina.

5. Rešavanje sistema algebarskih jednačina, odnosno određivanje nepoznatih veličina u čvorovima.

6. Proračun potrebnih uticaja u čvorovima za konačne elemente pojedinačno.

Konačni element je greda, sabirnica, sa početnim čvorom  $i$  i krajnjim čvorom  $j$  (Sl. 1). Konačni element može biti deo grede koji se može proizvoljno odabrati. Dužina grede je  $L$  a površina

poprečnog preseka je  $A$ . U opštem slučaju ovakav element ima 12 stepeni slobode, svaki od krajeva može imati kretanje u tri pravca, ima dva nagiba i ugao uvijanja. Vektori opterećenja,  $F$ , i pomeranja,  $U$ , glase:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix}, \{U\} = \begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \end{Bmatrix}$$

$$\{F_r\} = \{F_{rx} \quad F_{ry} \quad F_{rz} \quad M_{rx} \quad M_{ry} \quad M_{rz}\}^T \quad (6)$$

$$\{U_r\} = \{U_{rx} \quad U_{ry} \quad U_{rz} \quad \Theta_{rx} \quad \Theta_{ry} \quad \Theta_{rz}\}^T, r = i, j$$

U metodi konačnih elemenata koeficijenti jednačine (4) su sada matrica masa,  $m$ , matrica krutosti  $k$  i matrica prigušenja  $c$ . Globalna matrica masa dobiva se zbiranjem svih lokalnih matrica masa napisanih za globalne čvorove slobode. Za konačni element moguće je matricu masa prikazati kao pozitivno definisanu dijagonalnu matricu zavisnu od geometrijskim karakteristikama elemenata, tvrdoće materijala, dužine i poprečnog preseka elementa. U zavisnosti od opterećenja matrica krutosti se izvodi za savijanje u X-Z i Y-Z ravni, uvijanje i aksijalno opterećenje. Matrica krutosti je izvedena za savijanje u X-Z ravni (Sl. 2), dok se za ostale slučajeve ona izvodi analogno [6]. Vektori napadnih sila i pomeraja glase:

$$\{F\} = \{F_{ix} \quad M_{iy} \quad F_{jx} \quad M_{jy}\}$$

$$\{U\} = \{u_{ix} \quad \Theta_{iy} \quad u_{jx} \quad \Theta_{jy}\} \quad (7)$$

Elastična linija grede pri savijanju može se predstaviti parabolom trećeg stepena (8), a nagib elastične linije izrazom (9).

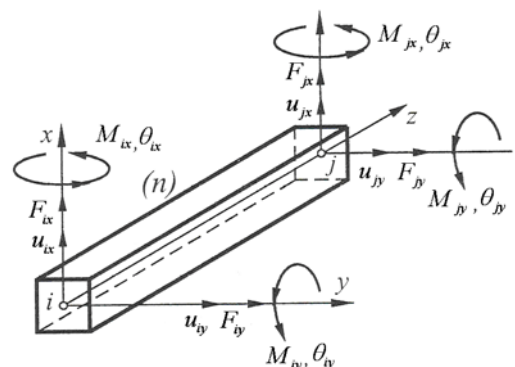
$$u_x = a_1 + a_2 \cdot z + a_3 \cdot z^2 + a_4 \cdot z^3 \quad (8)$$

$$\Theta_x = \frac{\partial u_x}{\partial z} = a_2 + 2 \cdot a_3 \cdot z + 3 \cdot a_4 \cdot z^2 \quad (9)$$

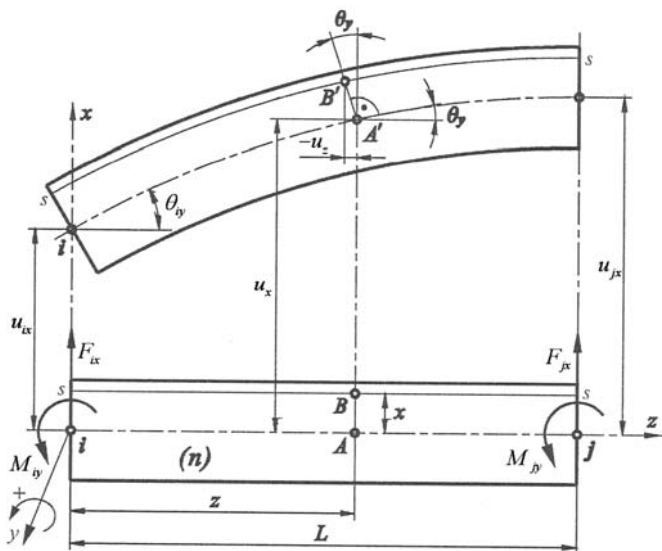
Pomeraj bilo koje tačke u pravcu Z-ose iznosi:

$$u_z = -\sin(\Theta_y) \cdot x \approx -\Theta_y \cdot x \quad (10)$$

Funkcije  $u_x$  i  $u_z$  predstavljaju funkcije pomeraja (SL. 4 i SL.5) i mogu se napisati u matričnom obliku:



Slika 1. Konačni element u obliku grede



Slika 2. Savijanje u X-Z ravni

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_z \end{Bmatrix} = [N]\{a\}$$

$$[N] = \begin{bmatrix} 1 & z & z^2 & z^3 \\ 0 & -x & -2xz & -3xz^2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\{a\} = \{a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4\}$$

U jednačini (11)  $N$  je funkcija oblika, a  $a$  je vektor konstanti. Da bi odredili vektor konstanti potrebno je poznavati granične uslove, potrebno je znati pomeraje početne,  $i$ , i krajnje,  $j$ , tačke grede. Ti pomeraji se određuju rešavanjem diferencijalne jednačine prinudnih prigušenih oscilacija. Nakon toga moguće je odrediti pomeraj bilo koje tačke konačnog elementa u bilo kom poprečnom preseku elementa. Ako se za krajnje tačke grede uvrsti  $z=0$  i  $z=l$  dobija se:

$$\{a\} = [C]^{-1} \cdot [U] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} U_{ix} \\ \Theta_{iy} \\ U_{jx} \\ \Theta_{jy} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

Nakon određivanja vektora konstanti moguće je odrediti funkcije pomeraja u X-Z ravni za zadato  $x$  i zadato  $z$ :

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_z \end{Bmatrix} = [N]\{a\} = [N] \cdot [C]^{-1} \cdot \{U\} \quad (13)$$

Nakon izračunavanja pomeraja i deformacije dobija se konačna matrica krutosti za savijanje u X-Z ravni (14). U jednačini (14)  $E$  je moduo elastičnosti, a  $I_y$  je otporni moment inercije na savijanje. Analogno opisanom postupku određuju se matrice krutosti za savijanje u Y-Z ravni i uvijanje. Sastavljanjem svih matrica krutosti dobija se ukupna matrica krutosti dimenzija 12x12. Matrica prigušenja koja figuriše u izrazu za prinudne prigušene oscilacije definiše se kao linearna kombinacija matrice masa i matrice krutosti (15).

$$[K] = \frac{2EI_y}{L^3} \begin{bmatrix} 6 & 3L & 6 & 3L \\ 3L & 2L^2 & -3L & L^2 \\ 6 & -3L & 6 & -3L \\ 3L & L^2 & -3L & 2L^2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$C = \alpha \cdot M + \beta \cdot K \quad (15)$$

U izrazu (15)  $\alpha$  i  $\beta$  su eksperimentalno određeni koeficijenti koji se mogu pronaći u literaturi. U radu su koeficijenti su izabrani da iznose 0,5. Od opterećenja na gredu uzeta je težina grede i elektromagnetska sila usled kratkog spoja. Obe sile su podužne i kontinualno raspoređene, jednako opterećuju svaki deo grede.

#### IV. REZULTATI

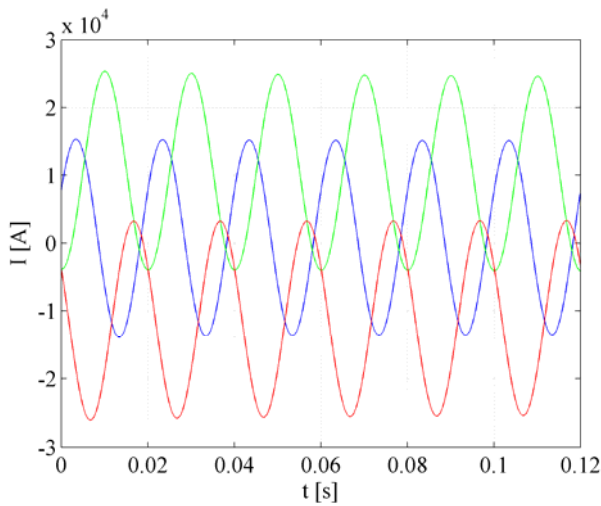
Kada je definisan matematički model problema i kada su utvrđeni svi metodi koji će se primenjivati odabran je MATLAB kao programski alat. U radu su koeficijenti su izabrani da iznose 0,5. Od opterećenja na gredu uzeta je težina grede i elektromagnetska sila usled kratkog spoja. Obe sile su podužne i kontinualno raspoređene, jednako opterećuju svaki deo grede.

Kada je definisan matematički model problema i kada su utvrđeni svi metodi koji će se primenjivati odabran je MATLAB kao programski alat. U radu su koeficijenti su izabrani da iznose 0,5. Od opterećenja na gredu uzeta je težina grede i elektromagnetska sila usled kratkog spoja. Obe sile su podužne i kontinualno raspoređene, jednako opterećuju svaki deo grede.

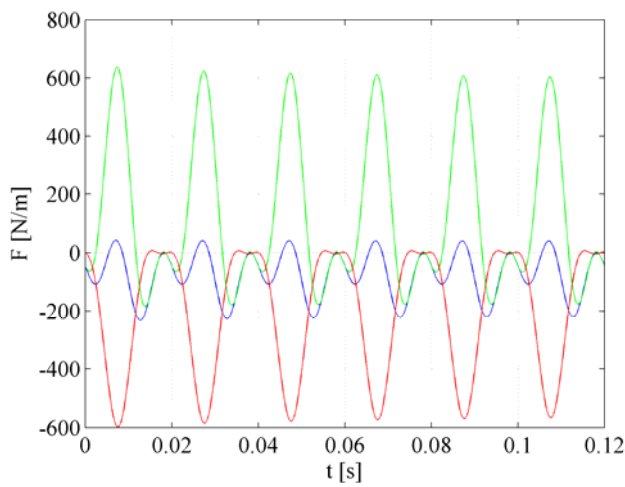
Elektromagnetska sila koja pobuđuje oscilovanje grede sadrži 50Hz i 100Hz komponente. Da bi se izbeglo približavanje sopstvene frekvencije oscilovanja grede frekvencijama koje sadrži elektromagnetska sila, čime bi se stvorili uslovi za velika dinamička naprezanja pri mehaničkoj rezonansi grede, traži se da sopstvena frekvencija oscilovanja grede bude van opsega (30 do 130) Hz [2]. Da bi se izvršila provera koja se odnosi na to da frekvencija treba biti manja od 30Hz i veća od 130Hz, potrebno je uneti frekvenciju iz nedozvoljenog opsega. Za unetu frekvenciju izračunava se kritična dužina sabirnica po formuli:

$$l = \sqrt{\frac{125,2}{f}} \cdot \sqrt{\frac{I}{q}} \quad (16)$$

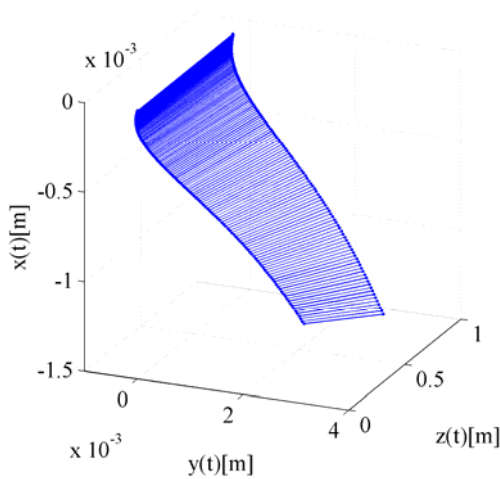
Jednakost (16) predstavlja formulu statičkog naprezanja i u njoj je  $I$  moment inercije,  $q$  poprečni presek i  $f$  zadata frekvencija. Formula (16) se odnosi na trpopolan kratak spoj kao najkritičniji kvar i središnju fazu sabirnica kao najopterećeniju. Za tako izračunatu dužinu sabirnica vrši se provera na dinamičko naprezanje. Grafici struja trofaznog kratkog spoja i nastalih elektromagnetnih sila na sabirnicama su predstavljeni na Sl. 3 i 4. Usled takvih struja i sila nastaje pomeranje početka i kraja sabirnica koje je prikazano na Sl. 5. Dalje je moguće odabrati proizvoljnu tačku grede i odrediti njene pomeraje. Tačka od interesa se odabira unošenjem kordinata  $x$  i  $z$  za X-Z poprečni presek, odnosno  $y$  i  $z$  za Y-Z poprečni presek. Na Sl. 6 i 7 su prikani pomeraji tačke koja se nalazi na sredini središnjeg preseka grede.



Slika 3. Struje tropolnog kratkog spoja



Slika 4. Promenljive elektromagnetske sile nastale usled tropolnog kratkog spoja



Slika 5. Vremenske promene pomeraja početka i kraja grede

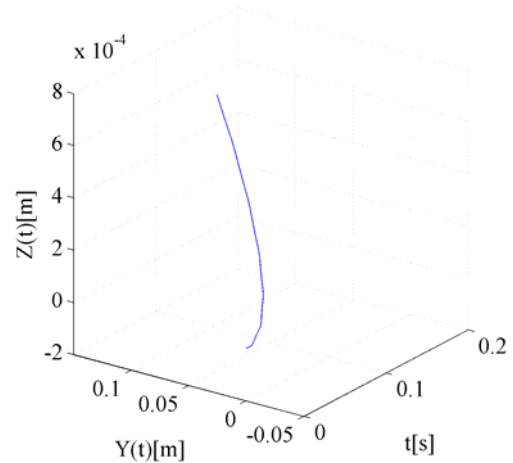
Na osnovu tih pomeraja izračunava se naprezanje grede u odabranoj tački koje se menja u vremenu. Moguće je dobiti maksimalno, kritično naprezanje grede i uporediti ga sa statičkim naprezanjem. Statičko naprezanje se računa po formulama:

$$\sigma_{stat} = \frac{M}{W}$$

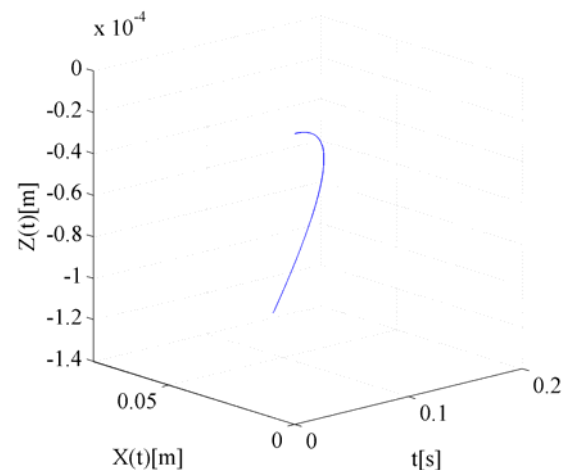
$$M = \frac{F \cdot l^2}{10} \quad (17)$$

$$F = \sqrt{3} \cdot 10^{-7} \frac{I_U^2}{a}$$

U prethodnim formulama  $M$  je moment savijanja niti čvrsto niti zglibno uklještene grede,  $W$  je moment otpora,  $F_U$  je relevantna statička sila koja zavisi od vrste kvara,  $I_U$  je udarna struja i  $a$  rastojanje između sabirnica.



Slika 6. Putanja tačke u vremenu koja je izabrana u Y-Z preseku



Slika 7. Putanja tačke u vremenu koja je izabrana u X-Z preseku

U Tabeli I prikazani su uporedni rezultati statičkog i dinamičkog naprezanja za različite frekvencije slobodnih oscilacija, za različite dužine bakarnih sabirnica pravougaonog oblika. U svim rezultatima dinamičko naprezanje je veće od statičkog kako je i očekivano. Za sve zadate frekvencije naprezanje je manje od kritičnog naprezanja plastične deformacije za bakar koje iznosi 300-500 [MN/m<sup>2</sup>]. Promenom frekvencije slobodnih oscilacija menja se istovremeno i dužina sabirnica. Programom je ispitano naprezanje sabirnice fiksne dužine 1,5m. Na taj način utvrđuju se učestanosti sila, struja kvara, koje dovode do opasnih naprezanja. Na Sl. 8 se vidi da su dinamičke sile najveće u opsegu frekvencije od 0 do 50Hz. Do 50 Hz dinamičke sile dovode do kritične plastične deformacije sabirnice. Za frekvencije preko 50Hz statičko naprezanje je neznatno veće od dinamičkog. Za frekvencije veće od 50Hz statička provera ide na stranu sigurnosti i pri tim frekvencijama ne dolazi do kritičnog naprezanja (Sl. 9).

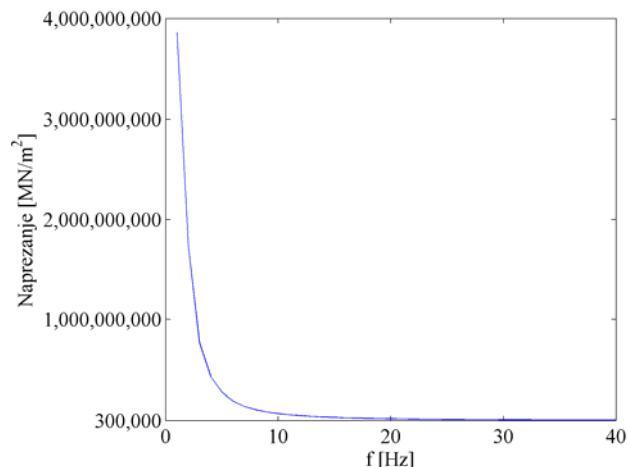
Na slobodne oscilacije grede moguće je uticati promenom dužine grede, dok na harmonike struja kratkog spoja i elektromagnetnih sila nije moguće uticati. Za kritično naprezanje od 300MN/m<sup>2</sup> za bakar određena je statički kritična dužina sabirnica koja iznosi 9,51m. Za tu dužinu grede dinamički proračun daje naprezanje 1030MN/m<sup>2</sup>. Iz tog razloga određena je kritična dužina dinamičkog proračuna koja iznosi 6,4m (Sl. 10). Na osnovu dobijeni rezultata potrebno je izvršiti dinamičko dimenzionisanje jer statička provera sa zabranjenim opsegom frekvencija slobodnih oscilacija nije validna.

## V. ZAKLJUČAK

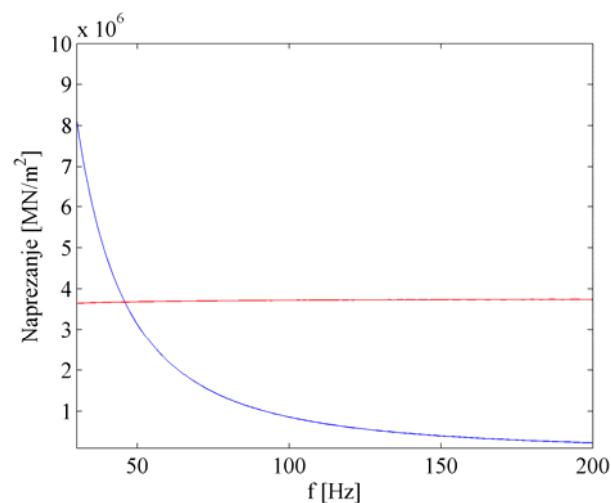
U radu je prikazan postupak provere sabirnica na dinamičko naprezanje. Objavljen je matematički model i primenjene su metode konačnih razlika i konačnih elemenata za njegovo rešavanje. Obraden je primer naprezanja bakarnih sabirnica pravougaonog oblika postavljenih paralelno u ravni. Za takave sabirnice prikazani su grafici pomeraja pri trolnom kratkom spoju kao najopasnijem kvaru. Pri različitim frekvencijama slobodnih oscilacija sabirnice javljaju se uvek veća dinamička naprezanja od statičkih. Opseg zabranjenih frekvencija statičkog proračuna ne važi u potpunosti za dinamički proračun. Najveća dinamička naprezanja se javljaju pri frekvencijama do 50Hz. Za više frekvencije statičke sile su veće od dinamičkih. Dinamička analiza naprezanja sabirnice je pokazala da je zabranjeni opseg slobodnih frekvencija grede od 0 do 50Hz.

TABELA I. UPOREDNI REZULTATI NAPREZANJA

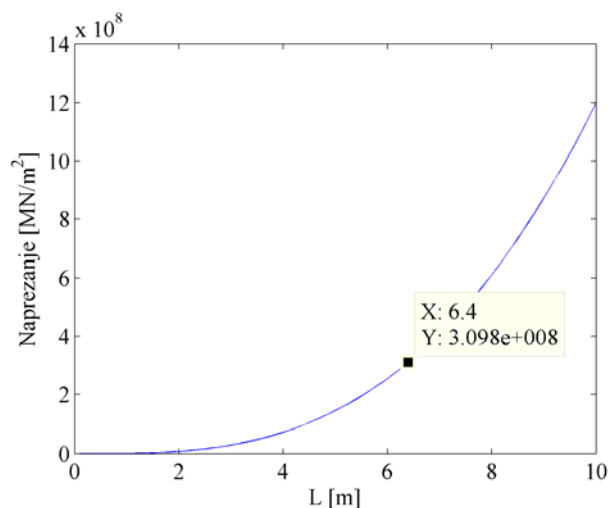
f [Hz]	L [m]	Naprezanje u X-Z ravni [MN/m <sup>2</sup> ]		Naprezanje u Y-Z ravni [MN/m <sup>2</sup> ]	
		statičko	dinamičko	statičko	Dinamičko
10	1,9	18,6	21,75	5,9	10,2
30	1,09	6,2	65,6	1,97	3,34
50	0,85	3,721	98	1,18	1,75
130	0,53	1,43	185	0,45	0,46
150	0,49	1,24	202	0,39	0,38



Slika 8. Dinamičko naprezanje za frekvencije do 40Hz



Slika 9. Presek dinamičkog i statičkog naprezanja za frekvencije veće od 40Hz



Slika 10. Zavisnost dinamičkog naprezanja od dužine sabirnica

Nezavisno od frekvencije slobodnih oscilacija potrebno je izvršiti dinamički proračun i utvrditi kritičnu dužinu sabirnice na osnovu kritične plastične deformacije za određeni materijal.

Razvijen programski kod može poslužiti kod projektovanja, dimenzionisanja i provere statičkog proračuna za različite vrste sabirnice u razvodnim postrojenjima.

#### LITERATURA

- [1] J. B. Dastous, J. R. Pierre, "Experimental investigation on the dynamic behavior of flexible conductors between substation equipment during an earthquake", IEEE, 04.1996.
- [2] M. Đurić, Visokonaponska postrojenja, Elektrotehnički fakultet, Beograd, Beopres, Beograd 2009., str. 145.
- [3] A. Der Kiureghian, K. J. Hong, J. L. Sackman, "Further Studies on Siesnic Interaction in Interconnected Electrical Substation Equipement", PEER, 09.1999.
- [4] M. Sekulović, Metod konačnih elemenata, Građevinski fakultet, Beograd, Građevinska knjiga, Beograd 1988., str. 25.
- [5] M. Đurić, Stabilnost i dinamika konstrukcija, Građevinski fakultet, Beograd, Zavod za grafičku tehniku, Beograd 1980., str. 3.

- [6] V. Travaš, I. Kožar, statička i dinamička analiza prostorne lančaniće, Građevinar, 60., maj 2008, 395.-402.
- [7] Z. Stojković, Projektovanje pomoću računara u elektroenergetici – primena programskih alata, Monografije, Elektrotehnički fakultet, Beograd, Akademska misao, Beograd, jul 2009, str. 521.

#### ABSTRACT

This paper analyzes the dynamic straining of substations busbar. It presented a mathematical model of strain busbar. The equations of static strain busbar were included variable electromagnetic force generated by a three-pole short-circuit currents. For solving such equations we used the numerical method of finite differences. This paper presents the results generated by the finite element method, which is applied using the software tool MATLAB. The results represent the displacement of any point in the cross section of the bus. The aim of work is to check the existing formula for strain bus, in order to prevent errors in their design.

#### **DYNAMIC STRAINING OF SUBSTATIONS BUSBAR**

Mileta Žarković, Milenko Đurić