

# Један поступак за рјешавање експоненцијалних водова са губицима

Милорад Бајић, Ђорђе Лекић, студент

Катедра за општу електротехнику

Електротехнички факултет

Бања Лука, Република Српска, БиХ

[milb@etfbl.net](mailto:milb@etfbl.net), [dods.90@live.com](mailto:dods.90@live.com)

*Садржај*—У раду је приказан један ефикасан поступак за прорачун експоненцијалних водова са губицима у проводницима вода. Поступак је заснован на представљању оваквог нехомогеног вода као каскадне везе више хомогених водова са несавршеним проводницима. Изведени су изрази за  $ABCD$  параметре хомогеног вода са несавршеним проводницима, а затим кориштен израз да је  $ABCD$  матрица експоненцијалног вода једнака производу  $ABCD$  матрица хомогених водова у каскадној вези. Овај поступак је примјењен на неколико примјера експоненцијалних водова са термогеним губицима у проводницима.

*Кључне ријечи*-  $ABCD$  параметри; експоненцијални вод; коефицијент рефлексије; коефицијент стојећих таласа

## I. Увод

Један од водова који припада класи нехомогених водова је експоненцијални вод. Као што му и сам назив каже, његове особине се мијењају дуж осе простирања по експоненцијалном закону. То практично значи да се његова подужна индуктивност и подужна капацитивност мијењају по експоненцијалном закону.

Овакви водови су нашли широку примјену у инжињерској пракси. Могло би се рећи да је њихова основна употреба, од самог почетка кориштења, у сврху широкопојасног прилагођења импеданси. Каснијим проучавањем је установљено да се они, сем за трансформацију импедансе, могу користити и у друге различите сврхе, као резонатори, филтри, линије за кашњење, заједнички елементи у интегралним колима велике густине паковања (VLSI) итд.

Објављен је велики број радова који су посвећени нехомогеним водовима и у већини тих радова, као што су [1-4], анализирани су нехомогени водови без губитака. Не подцјењујући резултате и закључке добијене овим анализама, оправдано је очекивати да се реалнији закључци могу добити ако се у разматрањима узму у обзир и губици. Релативно је мали број оваквих радова, било да се ради о губицима у проводницима, као у радовима [5-8], било да се ради о губицима у диелектрику вода, као у радовима [9-11].

Када је ријеч о нехомогеном воду са губицима у проводницима, онда је у [5] овакав вод анализиран примјеном пертурбационог поступка. У радовима [6] и [8] је рјешење тражено у аналитичком облику уз одређене апроксимације, док је у [7] рјешење за напон на воду тражено нумерички, рјешавањем одговарајуће интегралне једначине помоћу полиномско-тригонометријске апроксимације и подешавања у тачкама.

У овом раду је разматран експоненцијални вод са несавршеним проводницима као каскадна веза хомогених водова са несавршеним проводницима. Изведени су изрази за  $ABCD$  параметре хомогеног вода са губицима у проводницима, а затим кориштен израз да је  $ABCD$  матрица експоненцијалног вода једнака производу  $ABCD$  матрица хомогених водова у каскадној вези.

## II. РЈЕШАВАЊЕ НЕХОМОГЕНИХ ВОДОВА

### A. $ABCD$ параметри хомогеног вода са несавршеним проводницима

Једначине телеграфичара за напон и струју на воду за простопериодичан режим могу да се напишу у облику

$$\frac{dU}{dz} = -Z'I, \quad (1a)$$

$$\frac{dI}{dz} = -Y'U, \quad (1b)$$

гдје су

$$Z' = R' + j\omega L', \quad (2a)$$

$$Y' = G' + j\omega C'. \quad (2b)$$

Параметри  $R'$ ,  $L'$ ,  $G'$  и  $C'$  представљају, респективно, отпорност, индуктивност, одводност и капацитивност по јединици дужине вода и константни су дуж осе вода  $z$ , док је  $\omega$  кружна учестаност.

Овдје ћемо разматрати случај када се подужна одводност  $G'$  може занемарити (нпр. за ваздушни вод), тако да је

$$Y' = j\omega C'. \quad (2c)$$

Диференцирањем (1а) и елиминацијом струје  $I$  добија се диференцијална једначина за напон

$$\frac{d^2U}{dz^2} - \gamma^2 U = 0, \quad (3)$$

гдје је

$$\gamma^2 = Z'Y' = -\omega^2 L'C' + j\omega C'R'. \quad (4)$$

Опште рјешење једначине (3)

$$U(z) = K_1 e^{\gamma z} + K_2 e^{-\gamma z} \quad (5)$$

представља збир два прогресивна таласа који се простиру у супротним смјеровима. Величина

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad (6)$$

је константа простирања, док је  $\alpha$  константа слабљења, а  $\beta$  фазна константа.

Из општег рјешења за напон добија се, на основу (1а), рјешење за струју  $I$

$$I(z) = -\frac{\gamma}{Z'} K_1 e^{\gamma z} + \frac{\gamma}{Z'} K_2 e^{-\gamma z}. \quad (7)$$

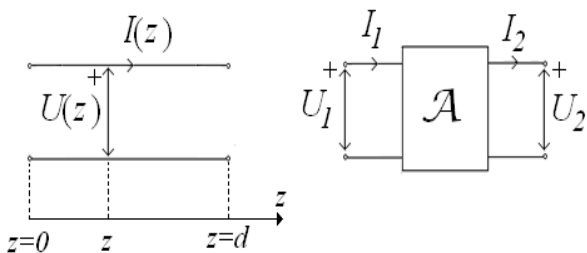
Однос напона и струје појединих компонената прогресивног таласа представља карактеристичну импедансу вода  $Z_c$ , тако да је

$$Z_c = \frac{Z'}{\gamma} = \sqrt{\frac{Z'}{Y'}} = \sqrt{\frac{L'}{C'} - j\frac{R'}{\omega C'}}, \quad (8)$$

па се коначно може писати

$$I(z) = -\frac{K_1}{Z_c} e^{\gamma z} + \frac{K_2}{Z_c} e^{-\gamma z}. \quad (9)$$

Ако се вод дужине  $d$  посматра као четворопол, онда се напон и струја на једном крају могу представити преко напона и струје на другом крају помоћу параметара  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  матрице  $\mathcal{A}$



Слика 1. Представа вода четворополом

$$U_1 = AU_2 + BI_2, \quad (10a)$$

$$I_1 = CU_2 + DI_2, \quad (10b)$$

или

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \mathcal{A} \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

гдје је

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}. \quad (12)$$

На основу (5) и (9) добијају се  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  параметри хомогеног вода дужине  $d$  са несавршеним проводницима

$$A = ch(\gamma d), \quad (13a)$$

$$B = Z_c sh(\gamma d), \quad (13b)$$

$$C = \frac{1}{Z_c} sh(\gamma d), \quad (13c)$$

$$D = ch(\gamma d). \quad (13d)$$

*Б. Експоненцијални вод са несавршеним проводницима*

У случајевима када се подужна импеданса  $Z'$  и подужна адмитанса  $Y'$  мијењају дуж осе простирања  $z$  из једначина телеграфичара се добија диференцијална једначина за напон

$$\frac{d^2U}{dz^2} - p(z) \frac{dU}{dz} - \gamma^2(z)U = 0, \quad (14)$$

гдје су

$$p(z) = \frac{1}{Z'(z)} \frac{dZ'(z)}{dz}, \quad (14a)$$

$$\gamma^2(z) = Z'(z)Y'(z). \quad (14b)$$

Рјешење једначине (14) не може се добити у затвореном облику, сем у неколико специјалних случајева.

Ако се подужна индуктивност и подужна капацитивност вода мијењају по експоненцијалном закону

$$L'(z) = L'_0 e^{2qz}, \quad (15a)$$

$$C'(z) = C'_0 e^{-2qz}, \quad (15b)$$

онда се такав нехомогени вод назива експоненцијални. Овдје су  $L'_0$  и  $C'_0$  подужна индуктивност и подужна капацитивност на мјесту  $z=0$ , а  $q$  фактор експоненцијалног вода.

У случају да проводници вода нису савршени, већ имају подужну отпорност  $R'$ , подужна импеданса је

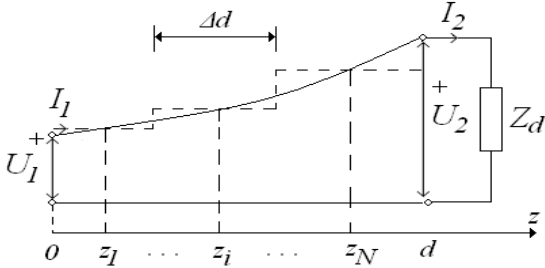
$$Z'(z) = R' + j\omega L'_0 e^{2qz}, \quad (16a)$$

а подужна адмитанса

$$Y'(z) = j\omega C'_0 e^{-2qz}. \quad (16b)$$

Из ових израза се могу одредити  $p(z)$  и  $\gamma(z)$  према (14a) и (14b), а  $Z_c(z)$  према (8).

Пошто се једначина за напон (14) ни у овом случају не може ријешити у аналитичком облику, рјешење овог вода потражићемо тако да експоненцијални вод разматрамо као каскадну везу  $N$  хомогених вода различитих карактеристичних импеданси и различитих константи простирања, чији проводници нису савршени.



Слика 2. Експоненцијални вод као каскадна веза  $N$  хомогених вода

Примјена овог поступка заснована је на особини  $ABCD$  матрица, тј. на особини да је  $ABCD$  матрица целокупне каскадне везе једнака производу  $ABCD$  матрица појединих ћелија у каскади. Доказ ове особине лако се добија кориштењем матричне једначине (11).

Иако се вод дужине  $d$  може подјелити на  $N$  дијелова на произвољан начин, овдје ће бити размотрен случај подјеле на дијелове једнаких дужина

$$\Delta d = \frac{d}{N}. \quad (17)$$

Карактеристична импеданса за  $i$ -ту секцију се може добити на основу (8)

$$Z_{ci} = Z_c(z_i) = \sqrt{\frac{L'_0}{C'_0} e^{4qz_i} - j \frac{R'}{\omega C'_0} e^{2qz_i}}, \quad (18a)$$

док се на основу (4) добија константа простирања за  $i$ -ту секцију

$$\gamma_i = \gamma(z_i) = \sqrt{-\omega^2 L'_0 C'_0 + j\omega C'_0 R' e^{-2qz_i}}, \quad (18b)$$

гдје је

$$z_i = (i - \frac{1}{2})\Delta d, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (18c)$$

Елементи матрице  $\mathcal{A}_i$   $i$ -те секције се сада рачунају као

$$A_i = ch(\gamma_i \Delta d), \quad (19a)$$

$$B_i = Z_{ci} sh(\gamma_i \Delta d), \quad (19b)$$

$$C_i = \frac{1}{Z_{ci}} sh(\gamma_i \Delta d), \quad (19c)$$

$$D_i = ch(\gamma_i \Delta d). \quad (19d)$$

Конечно, матрица  $\mathcal{A}$  експоненцијалног вода може да се замјени матрицом  $\mathcal{A}_{tot}$  која је једнака производу матрица свих секција, тј.

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{tot} = \prod_{i=1}^N \mathcal{A}_i. \quad (20)$$

Када је позната матрица  $\mathcal{A}$ , односно  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  параметри експоненцијалног вода, онда се улазна импеданса на почетку вода  $z = 0$  рачуна као

$$Z_{ul} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{AZ_d + B}{CZ_d + D}, \quad (21)$$

гдје је

$$Z_d = \frac{U_2}{I_2} \quad (22)$$

импеданса прикључена на крају експоненцијалног вода  $z = d$ .

### III. НУМЕРИЧКИ РЕЗУЛТАТИ

Изложени поступак примјењен је на прорачун експоненцијалног вода дужине  $d = 0,5m$ , који треба да изврши трансформацију импедансе  $Z_d = 400\Omega$ , прикључене на крају вода, на импедансу  $Z_0 = 300\Omega$ , на почетку вода. Одавде се добија да је фактор експоненцијалног вода  $q = 1/(2d) \ln(Z_d/Z_0) = \ln(4/3)$ . Ако се узме да је експоненцијални вод ваздушни, онда је брзина простирања таласа  $v = 3 \cdot 10^8 m/s$ , па како је  $v = 1/\sqrt{L'_0 C'_0}$  и  $Z_0 = \sqrt{L'_0 / C'_0}$ , то је  $L'_0 = Z_0 / v = 10^{-6} H/m$  и  $C'_0 = 1/(v Z_0) = (100/9) \cdot 10^{-12} F/m$ .

Улазна импеданса на мјесту  $z = 0$  одређује се из релације (21), а улазни коефицијент рефлексије према изразу

$$\Gamma_{ul} = \frac{Z_0 - Z_{ul}}{Z_0 + Z_{ul}}. \quad (23)$$

Коефицијент стојећих таласа напонна на почетку вода се рачуна према изразу

$$VSWR = \frac{1 + |\Gamma_{ul}|}{1 - |\Gamma_{ul}|}. \quad (24)$$

Вриједности улазне импедансе и модула коефицијента рефлексије добијени овим поступком (I) и поступком кориштеним у [8] (II), за неколико вриједности подужне отпорности вода  $R'$ , приказани су у табели II. Ове величине су рачунате при фреквенцији  $f = 300MHz$ , односно при таласној дужини  $\lambda = 1m$ . Може се уочити добра подударност добијених резултата овим поступцима.

ТАБЕЛА I ПОРЕЂЕЊЕ ВРИЈЕДНОСТИ УЛАЗНЕ ИМПЕДАНСЕ И МОДУЛА КОЕФИЦИЈЕНТА РЕФЛЕКСИЈЕ У ФУНКЦИЈИ ПОДУЖНЕ ОТПОРНОСТИ ЗА ПОСТУПКЕ I И II

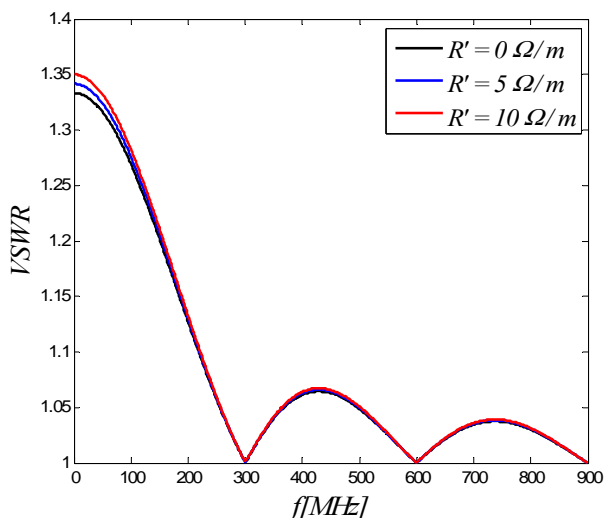
$R'$ $\Omega/m$	I		II	
	$Z_{ul}$	$ \Gamma_{ul} $	$Z_{ul}$	$ \Gamma_{ul} $
0	299,909468 – j0,000298	0,000151	299,909409 – j0,000299	0,000151
1	299,911047 – j0,040175	0,000163	299,909092 – j0,020267	0,000172
3	299,914307 – j0,120350	0,000246	299,908500 – j0,060715	0,000287
5	299,917705 – j0,201081	0,000362	299,907964 – j0,101841	0,000433
10	299,926744 – j0,405394	0,000687	299,906873 – j0,207599	0,000818

У табели II приказане су вриједности коефицијента стојећих таласа, VSWR, при двије различите фреквенције и за неколико вриједности подужне отпорности проводника вода,  $R'$ .

ТАБЕЛА II ЗАВИСНОСТ ВРИЈЕДНОСТИ КОЕФИЦИЈЕНТА СТОЈЕЋИХ ТАЛАСА ОД ПОДУЖНЕ ОТПОРНОСТИ

$R'$ $\Omega/m$	VSWR	
	$f = 300 \text{ MHz}$	$f = 600 \text{ MHz}$
0	1,000282	1,000056
1	1,000306	1,000082
3	1,000476	1,000193
5	1,000707	1,000316
10	1,001349	1,000632

На слици 3 приказана је зависност коефицијента стојећих таласа од фреквенције таласа за неколико вриједности подужне отпорности вода. Лако се запажа да се трансформаторске карактеристике експоненцијалног вода унеколико кваре са повећањем подужне отпорности, али то није нарочито изражено, поготово на вишим фреквенцијама.

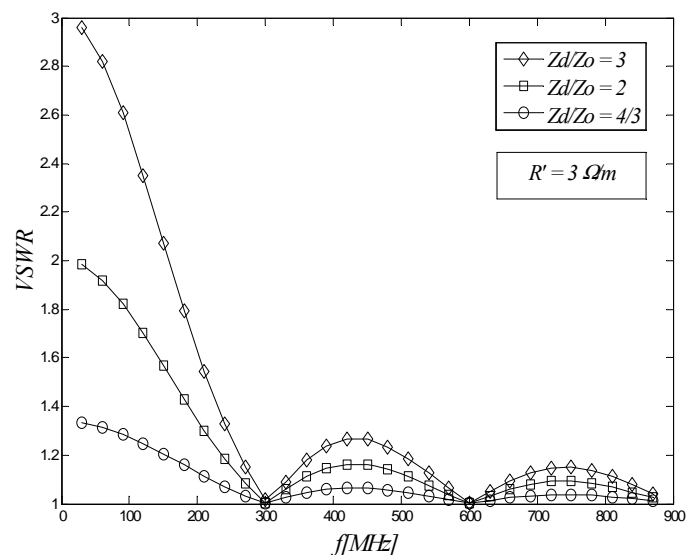


Слика 3. Зависност коефицијента стојећих таласа од фреквенције за неколико вриједности подужне отпорности вода

На слици 4 је приказана зависност коефицијента стојећих таласа од фреквенције за експоненцијалне водове различитих односа трансформације

$$P = \frac{Z_d}{Z_0}, \quad (25)$$

па, према томе, и различитих фактора експанзије  $q$ . За све случајеве је узиман вод исте подужне отпорности  $R' = 3 \Omega/m$ .



Слика 4. Зависност коефицијента стојећих таласа од фреквенције за водове различитих односа трансформације

Може се уочити да су трансформаторске особине лошије за веће односе трансформације, нарочито при нижим фреквенцијама.

#### IV. ЗАКЉУЧАК

На основу резултата приказаних у табелама може се закључити да се резултати прорачуна експоненцијалних водова са несавршеним проводницима добијени овим поступком добро слажу са резултатима који се добијају другим методама.

Из резултата приказаних на сл.3 и сл.4 може се закључити да се трансформаторске карактеристике водова кваре са порастом подужне отпорности и порастом односа трансформације, што је било и за очекивање.

Добијени резултати показују да термогени губици у проводницима експоненцијалних водова не нарушавају много њихова широкопојасна трансформаторска својства.

Трансформаторске карактеристике далеко више зависе од односа трансформације и кориштење експоненцијалних водова за прилагођење у случајевима већих односа трансформације је ограничено на више фреквенције или на кориштење водова већих дужина.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] C. R. Burrows, "The exponential transmission line", Bell. Syst. Tehn. Journal, Vol. 17, pp. 555-573, 1938.
- [2] R. N. Ghose: "Exponential transmission lines as resonators and transformers", IRE Trans. Microwave Theory Techn., Vol. MTT – 5, pp. 213–217, 1957.
- [3] C. P. Womack: "The use of exponential lines as microwave components", IRE Trans. Microwave Theory Techn., Vol. MTT – 10, pp. 124–132, 1962.
- [4] M. J. Ahmed, "Impedance transformation equations for exponential, cosine-squared, and parabolic tapered transmission lines", IEE Trans, Microwave Theory Techn., Vol. 29, pp. 67-68, 1981.
- [5] Д.М. Величковић, Д. Тодоровић, "Један поступак за решавање нехомогених водова", YUTEL 81, В1/7-1 до В1/7-8, Љубљана, 1981.
- [6] З.Ж. Цветковић, "Експоненцијални вод као широкопојасни трансформатор импедансе", TELFOR 1994, Зборник радова, стр. 183-186, Београд, 1994.
- [7] М. Бајић, Ј. Влајић, "Једно рјешење проблема експоненцијалног вода са губицима", XL Конференција за ETRAN, Зборник радова, стр. 423-425, Будва, 1996.

- [8] M. Bajić, Z.Ž. Cvetković, „A simple method for solving of loss exponential transmission lines“, XII-th International Workshop on Optimization and Inverse Problems in Electromagnetism, pp. 112-113, Ghent, Belgium, 2012.
- [9] S. He, "Closed-form solution for lossy exponential transmission line problem in frequency and time domains", Journal Electromag, Waves Applic. , Vol. 9, pp. 521-540, 1995.
- [10] M. Bajić, " A numerical solution for lossy exponential transmission line problem.", Proc. of Extended Abstracts 7th International Conference on Applied Electromagnetics ПЕС'05, pp.127-128, Niš, 2005.
- [11] Бајић М., Цветковић З., „Експоненцијални вод са несавршеним диелектриком“, ETRAN, LXI Конференција, Зборник радова, стр. МТ4.5-1-4, Златибор, 2012.

#### ABSTRACT

**This paper presents an efficient methodology for the calculation of exponential lines with losses in conductors. The procedure is based on the presentation of a non-homogeneous line as a cascade connection of more homogeneous lines with imperfect conductors. The expressions for the  $ABCD$  parameters of a homogeneous line with imperfect conductors were derived, and the term that the  $ABCD$  matrix of an exponential line is equal to the product of homogeneous lines  $ABCD$  matrixes in cascade connection was used. This procedure has been applied to several examples of exponential lines with losses in conductors.**

**Keywords-** *ABCD parameters; exponential line, reflection coefficient, voltage standing wave ratio*

#### **A PROCEDURE TO SOLVE EXPONENTIAL TRANSMISSION LINES WITH LOSSES**

Milorad Bajić, Đorđe Lekić