INFOTEH-JAHORINA Vol. 12, March 2013.

Estimacija amplitude i frekvencije kombinovanjem Furijeove i metode najmanjih kvadrata

Darko Šošić
Energetika/Katedra za elektroenergetske sisteme
Elektrotehnički fakultet
Beograd, Srbija
sosic@etf.rs

Dr Milenko Đurić red. prof.
Energetika/Katedra za elektroenergetske sisteme
Elektrothenički fakultet
Beograd, Srbija
mdjuric@etf.rs

Sadržaj—**U radu je prezentovan algoritam za estimaciju amplitude i frekvencije mernih signala u elektroenergetskom sistemu (EES) koji se bazira na nerekurzivnoj Fourier-ovoj metodi i metodi minimuma kvadrata odstupanja (LES). Predloženi algoritam podrazumeva adaptivnu korekciju širine prozora podataka u skladu sa promenom frekvencije mernog signala. Na ovaj način se znatno smanjuje greška merenja između frekvencije mernih signala i pretpostavljene frekvencije u Fourier-ovom algoritmu.**

Ključne riječi-estimacija frekvencije i amplitude; diskretna Fourier-ova transformacija; LES metoda

I. Uvod

Frekvencija predstavlja veoma važan operativni parametar u EES. Kao globalna sistemska veličina omogućava da se njenim merenjem, odnosno praćenjem, vrši kontrola i upravljanje balansom aktivnih snaga generisanja i potrošnje u EES-u. Pošto je EES veoma dinamičan sistem, brza i tačna procena frekvencije omogućava pravovremene i pravilne upravljačke akcije koje obezbeđuju stabilan rad agregata i mali nivo varijacije frekvencije oko propisane nominalne vrednosti. Pored toga, digitalno merenje i praćenje amplituda osnovnih harmonika napona i struja u EES-u je od suštinskog značaja za pravilno funkcionisanje EES-a. Od tačnosti i brzine merenja zavisi efikasnost cele digitalne relejne zaštite. Sistem za upravljanje, monitoring i kontrolu elemenata u EES-u takođe zahteva brzo i tačno merenje napona i struja.

Pouzdano i tačno merenje frekvencije ima posebnu važnost u sistemu relejne zaštite. Za savremene mikroprocesorske multifunkcionalne digitalne releje neophodno je što pouzdanije i preciznije merenje frekvencije ne samo iz razloga pravilnog vršenja nadfrekvencijske i potfrekvencijske zaštitne funkcije već i iz razloga što metode digitalnog procesiranja, odnosno procene, mernih signala (napona i struje) zahtevaju poznavanje njihove frekvencije. Dakle, merenje frekvencije je neophodno za pravilno funkcionisanje kompletnog sistema digitalne relejne zaštite. Pošto se zaštitne funkcije najčešće aktiviraju kao posledica poremećaja u EES-u, od posebne važnosti je pouzdano merenje frekvencije i u poremećenim odnosno havarijskim i posthavarijskim stanjima. Iako je frekvencija globalna veličina njeno merenje se vrši lokalno, procesiranjem signala napona. U popremećenim stanjima u sistemu vremenski oblik napona može u velikoj meri da odstupa od prostoperiodičnog, pa u takvim okolnostima klasične digitalne tehnike merenja frekvencije (metoda brojanja prolazaka signala kroz nulu i slične) postaju praktično neupotrebljive.

Razvoj digitalnih mernih, kontrolnih i zaštitnih sistema prati i razvoj energetske elektronike, koja je sve više prisutna kod potrošača različite snage. To za posledicu ima sve veći nivo prisustva viših harmonijskih komponenti u strujama i naponima na mestu ugradnje digitalnih mernih sistema. Problem zagađenosti EES-a višim harmonicima se dodatno aktuelizuje sa razvojem distribuirane proizvodnje. Većina malih elektrana je na EES priključena preko energetskih pretvarača, pa je njihova eksitacija složenoperiodična. Iz pomenutih razloga, algoritmi koji se koriste u digitalnim estimatorima amplitude mernih signala moraju obezbediti tačnost i u uslovima velikih harmonijskih izobličenja ulaznog signala.

U ovom radu je predložen algoritam za merenje frekvencije i amplitude koji se zasniva na nerekurzivnoj Fourier-ovoj i metodi minimuma kvadrata odstupanja (LES) sa adaptivnom širinom prozora podataka. Primenom diskretne Fourier-ove transformacije vrši se filtriranje mernog signala i njegova dekompozicija na dve ortogonalne rotirajuće komponente. Zatim se jedna od ortogonalnih komponenti obrađuje LES metodom. Korigovanje širine prozora podataka je uslovljeno promenom osnovne periode mernog signala, koja se može proceniti kombinacijom Fourier-ove i LES metode. Korekcija širine prozora podataka se vrši ukoliko je odstupanje periode mernog signala u odnosu na periodu proračunatu u prethodnom prozoru podataka veće od jedne periode odabiranja. Mane prethodnog algoritma su uglavnom vezane za uzak opseg rada, ili kod integralnog modela, relativno veliko zahtevano procesorsko vreme LES metode. Algoritam koji je predložen u ovom radu eliminiše ove nedostatke postojećih algoritama baziranih na nerekurzivnoj LES tehnici, a istovremeno zadržava kvalitet u pogledu tačnosti i robusnosti što je verifikovano kroz simulacije na različitim generisanim signalima.

II. Nerekurzivni diskretni Fourier-ov algoritam

Posmatra se merni signal $x(t)$ oblika:

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi) + R(t) \tag{1}$$

gde su:

X_m – maksimalna vrednost osnovnog harmonika,

$\omega=2\pi f$ – osnovna ugaona frekvencija,

f – osnovna frekvencija,

φ – početna faza osnovnog harmonika,

$R(t)$ – deo signala koji se sastoji od sume viših harmonika.

Signal (1) se može predstaviti diskretnom Fourier-ovim redom:

$$\underline{X} \cong \frac{2}{m}\left[\sum_{n=1}^{m} x_n \cos\left(\frac{\omega_f T_f}{m} n\right) - j\sum_{n=1}^{m} x_n \sin\left(\frac{\omega_f T_f}{m} n\right)\right]$$

$$\underline{X} = A + jB \tag{2}$$

gde su:

$\underline{X}$ – procena fazora osnovnog harmonika mernog signala $x(t)$,

ω_f – pretpostavljena frekvencija osnovnog harmonika mernog signala,

m – broj odbiraka u periodi T_f,

x_n – n-ti odbirak signala,

A i B – realna i imaginarna komponenta fazora $\underline{X}$.

Relacija (2) se može napisati u preglednijem matričnom obliku:

$$\underline{X} = [COS][x]^T + j[SIN][x]^T = A + jB \tag{3}$$

gde je [x] vektor odbiraka u prozoru podataka:

$$[x] = [x_1\ x_2\ \ x_3\ \ \cdots\ \ x_m] \tag{4}$$

Vektori COS i SIN se formiraju za pretpostavljenu frekvenciju mernog signala (f_f) i za datu frekvenciju odabiranja (f_s) signala $x(t)$, prema relacijama:

$$COS = \frac{2}{m}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{m}\right) \ \cdots\ \cos\left((m-1)\frac{2\pi}{m}\right) \ \ 1\right] \tag{5}$$

$$SIN = \frac{2}{m}\left[\sin\left(\frac{2\pi}{m}\right) \ \cdots\ \sin\left((m-1)\frac{2\pi}{m}\right) \ \ 0\right] \tag{6}$$

gde je

$$m = \frac{f_s}{f_f} \tag{7}$$

Pretpostavljena frekvencija mernog signala (f_f) i zadata frekvencija odabiranja (f_s) moraju biti tako odabrane da m bude ceo broj. Realna i imaginarna komponenta A i B u relaciji (3) su periodične funkcije vremena. Ako su osnovna frekvencija mernog signala i pretpostavljena frekvencija u Fourier-ovom redu jednake ($m\cdot T_{odab}=T_f=T=1/f$), onda su $A(t)$ i $B(t)$ prostoperiodične ortogonalne funkcije sa frekvencijom jednakom f. Ako je $T_f \neq T$ funkcije $A(t)$ i $B(t)$ su složenoperiodične ali im je frekvencija osnovnog harmonika opet f.

Procena amplitude osnovnog harmonika mernog signala C_f se može vršiti na osnovu sledeće relacije:

$$C_f = \sqrt{A^2 + B^2} \tag{8}$$

gde su A i B realna i imaginarna komponenta osnovnog harmonika mernog signala $x(t)$, respektivno.

III. Merenje frekvencije i amplitude primenom nerekurzivne LES metode

Prema pretpostavci naponski signal čija se frekvencija meri, u opštem slučaju je složenoperiodična funkcija vremena kako u stacionarnom, tako i u poremećenim režimima, koji pored viših harmonika može da sadrži i jednosmernu komponentu. Matematički model ulaznog naponskog signala u A/D konvertor ima analitičku formu definisanu sledećim izrazom:

$$v(t) = V_0 + \sum_{k=1}^{M} V_{rk}\sin(k\omega t) + \sum_{k=1}^{M} V_{ik}\cos(k\omega t) + e(t) \tag{9}$$

gde su:

$v(t)$ – amplituda napona u trenutku t,

V_0 – jednosmerna komponenta napona,

$\omega=2\pi f$ – kružna učestanost osnovnog harmonika napona,

M – najviši red harmonika u signalu napona,

V_k – amplituda k-tog harmonika,

θ_k – faza k-tog harmonika,

$e(t)$ – aditivni signal šuma.

Korišćenjem osnovnih trigonometrijskih jednačina, prethodna jednačina se može napisati u sledećem obliku:

$$v(t) = V_0 + \sum_{k=1}^{M} V_{rk}\sin(k\omega t) + \sum_{k=1}^{M} V_{ik}\cos(k\omega t) + e(t) \tag{10}$$

gde su $V_{rk} = V_k \cos\,\theta_k$ i $V_{ik} = V_k \sin\,\theta_k$ realna i imaginarna komponenta k-tog harmonika, respektivno.

Razvojem trigonometrijskih funkcija $\sin(k\omega t)$ i $\cos(k\omega t)$ u Tailor-ov red u okolini pretpostavljene (nominalne) frekvencije ω_0 izraz (10) se može linearizovati. Linearizovana analitička forma mernog signala napona, u okolini pretpostavljene frekvencije ω_0 je data sledećom relacijom:

$$v(t)=V_0+\sum_{k=1}^{M}\left[V_{rk}\sin(k\omega_0 t)+V_{rk}\Delta\omega kt\cos(k\omega_0 t)\right]$$
$$+\sum_{k=1}^{M}\left[V_{ik}\cos(k\omega_0 t)-V_{ik}\Delta\omega kt\sin(k\omega_0 t)\right]+e(t) \qquad (11)$$

Relacija (11) se mpže napisati u sledećem jednostavnijem obliku:

$$v(t)=\sum_{j=1}^{4M}a_j(t)x_j+e(t) \qquad (12)$$

gde su $a_j(t)$ koeficijenti definisani relacijama (13), a x_j nepoznate definisane relacijama (14):

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1\\
a_{1+k} &= \sin(k\omega_0 t)\\
a_{M+1+k} &= kt\cdot\cos(k\omega_0 t)\\
a_{2M+1+k} &= \cos(k\omega_0 t)\\
a_{3M+1+k} &= -kt\cdot\sin(k\omega_0 t)\\
k &= 1,\dots,M
\end{aligned} \qquad (13)$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= V_0\\
x_{1+k} &= V_{rk}\\
x_{M+1+k} &= V_{rk}\Delta\omega\\
x_{2M+1+k} &= V_{ik}\\
x_{3M+1+k} &= V_{ik}\Delta\omega
\end{aligned} \qquad (14)$$

Na izlazu iz A/D konvertora za svaki od odbiraka signala napona može se napisati relacija (12). Ako se uoči m uzastopnih odbiraka koji čine prozor podataka, tada se ispisivanjem relacije (12) za svaki odbirak formira sistem od m jednačina, koji se može predstaviti u sledećoj matričnoj formi:

$$[v]=[a]\,[x]+[e] \qquad (15)$$

gde su:

$[v]=[v_1\ v_2\ ...\ v_m]^T$ – vektor odbiraka koji čine prozor podataka,

$[e]=[e_1\ e_2\ ...\ e_m]^T$ – vektor grešaka,

$[a]_{m\mathrm{x}(4M+1)}$ – matrica koeficijenata, definisanih relacijom (13) za odgovarajuće diskretne vremenske trenutke odabiranja,

$[x]_{(4M+1)\mathrm{x}1}$ – vektor nepoznatih definisanih relacijom (14).

Frekvencija odabiranja f_s (f_s=1/T) je konstanta, pa su odbirci mernog signala ekvidistantni. Koeficijenti matrice [a] se računaju za diskretne vremenske trenutke prema sledećim relacijama:

$$\begin{aligned}
a_1(n) &= 1\\
a_{1+k}(n) &= \sin(k\omega_0 nT)\\
a_{M+1+k}(n) &= knT\cos(k\omega_0 nT)\\
a_{2M+1+k}(n) &= \cos(k\omega_0 nT)\\
a_{3M+1+k}(n) &= -knT\sin(k\omega_0 nT)\\
n &= 1,2,\dots,m
\end{aligned} \qquad (16)$$

Suština metode najmanjih kvadrata je da se nađe optimalna procena vektora nepoznatih [x] tako da elementi vektora greške [e] budu minimalni. Optimalna procena vektora nepoznatih $[x]^*$ se dobija iz relacije:

$$[x]^*=\left\{[a]^T[a]\right\}^{-1}[a]^T[v]=[A][v] \qquad (17)$$

gde je [A] leva pseudoinverzna matrica matrice [a]. Elementi matrice [A] zavise od periode odabiranja T i pretpostavljene učestanosti ω_0.

Nakon optimalne procene elemenata vektora [x], mogu se izračunati: jednosmerna komponenta napona, efektivne vrednosti i početne faze osnovnog i svih viših harmonika koji su obuhvaćeni modelom signala (9) i odstupanje učestanosti $\Delta\omega$ od pretpostavljene vrednosti ω_0. Proračun ovih parametara se vrši na osnovu sledećih relacija:

$$\begin{aligned}
V_0 &= x_1\\
V_k &= \sqrt{V_{rk}^2+V_{ik}^2}=\sqrt{x_{1+k}^2+x_{2M+1+k}^2}\\
\theta_k &= \operatorname{arctg}\left(x_{2M+1+k}/x_{k+1}\right)\\
\Delta\varpi &= V_{rk}\Delta\omega/V_{rk}=x_{M+1+k}/x_{1+k}\\
k &= 1,2,\dots,M
\end{aligned} \qquad (18)$$

Na osnovu relacija (18) može se odrediti odstupanje frekvencije u tekućem prozoru podataka od pretpostavljene vrednosti ω_0 po znaku i modulu. Procenjena vrednost učestanosti se dobija iz izraza:

$$\omega=\omega_0+\Delta\omega \qquad (19)$$

Unapređivanje ove metode se vrši uvođenjem povratne sprege po frekvenciji. Osnovna ideja je da se iterativno koriguje vrednost frekvencije ω_0, čime se postiže da se u svakom narednom koraku frekvencija sa kojom se vrši linearizacija modela napona približi njenoj stvarnoj vrednosti. Na ovaj način se vrši tačniji proračun svih nepoznatih. Radi ubrzavanja algoritma vrši se samo jedna korekcija po iteraciji, tako da je iterativni algoritam predstavljen relacijama (20) i (21), i on daje procenu frekvencije nakon svakog novog prozora podataka.

$$[x_i]=[A_i(\omega_{i-1})][v_i],\ \omega_i=\omega_{i-1}+\Delta\omega_i \qquad (20)$$

$$[x_{i+1}]=[A_{i+1}(\omega_1)][v_{i+1}],\ \omega_{i+1}=\omega_i+\Delta\omega_{i+1} \quad (21)$$

U daljoj analizi je predložen modifikovani Fourier-ov i LES algoritam koji je prihvatljiv sa aspekta tačnosti i brzine i u uslovima velike varijacije frekvencije u EES-u. Modifikacija se odnosi na uvođenje povratne sprege po frekvenciji pri formiranju vektora *COS* i *SIN* i matrice [*A*]. Za realizaciju ovog algoritma neophodna je sukcesivna estimacija frekvencije mernog signala.

IV. ADAPTIVNI ALGORITAM

Pri ostvarivanju povratne sprege po frekvenciji moraju biti očuvani principi na kojima se bazira Fourier-ova metoda. Dužina prozora podataka mora da sadrži ceo broj perioda signala pretpostavljene frekvencije i ceo broj perioda odabiranja, odnosno m mora biti ceo broj.

Osnovni algoritamski koraci su:

1. Formiraju se vektori *COS* i *SIN* i matrica [*A*] za pretpostavljenu frekvenciju signala f_f i zadatu frekvenciju odabiranja f_s.
2. Popunjava se vektor prozora podataka sa odbircima signala po principu pomeračkog registra.
3. Diskretnom Fourier-ovom transformacijom (DFT) se ulazni signal razlaže na ortogonalne komponente.
4. Sinusna komponenta dobijena DFT-jom se dalje obrađuje LES metodom pri čemu su u matrici [*a*] uvažene samo jednosmerna komponenta i osnovni harmonik. Matrica [*a*] ima sledeći oblik:

$$[a]=\begin{bmatrix} 1 & \sin(\omega T) & T\cos(\omega T) & \cos(\omega T) & -T\sin(\omega T) \\ 1 & \sin(\omega 2T) & 2T\cos(\omega 2T) & \cos(\omega 2T) & -2T\sin(\omega 2T) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \sin(\omega mT) & mT\cos(\omega mT) & \cos(\omega mT) & -mT\sin(\omega mT) \end{bmatrix} \quad (22)$$

   Kao rezultat ovog koraka dobija se procenjena amplituda i frekvencija mernog signala.

5. U kontinualnom procesu estimacije frekvencije i amplitude nakon svake periode signala dobija se frekvencija i amplituda signala, koje predstavljaju srednje vrednosti frekvencije i amplitude signala u prethodnoj periodi.
6. U k-tom koraku odabiranja proračunava se razlika između perioda koje odgovaraju aktuelnoj estimiranoj frekvenciji signala f i aktuelnoj frekvenciji f_{fk}, koja odgovara aktuelnom sadržaju vektora COS_k i SIN_k i matrice $[A_k]$, odnosno:

$$\Delta T_{fk}=T_k-T_{fk} \quad (23)$$

   gde su T_k estimirana perioda signala na kraju k-te periode signala, T_{fk} perioda koja odgovara frekvenciji f_{fk}.

7. Ukoliko je proračunata greška $|\Delta T_{fk}|>T_s/2$, onda se vrši novi proračun vektora COS_{k+1} i SIN_{k+1} i matrice $[A_{k+1}]$, prema relacijama (5), (6) i (17), ali za novu vrednost promenljive m_{k+1} koja se računa prema sledećoj relaciji:

$$m_{k+1}=m_k+\text{celobrojno}\left(\frac{\Delta T_k}{T_s}\right) \quad (23)$$

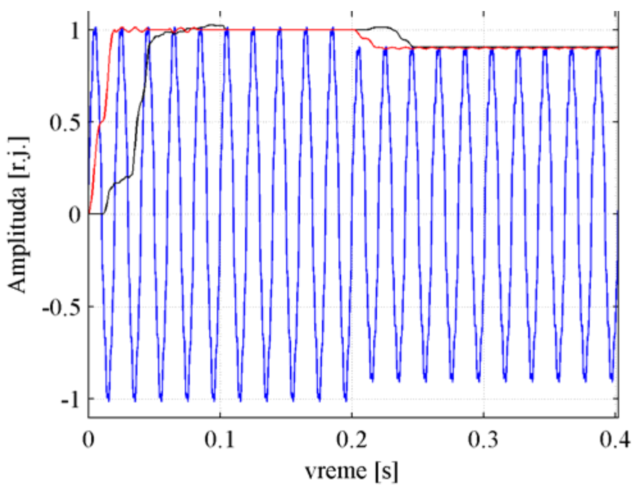
8. Pri uzimanju prvog odbirka iz k+1 periode signala prozor podataka $[x_k]$ se formira sa m_{k+1} odbiraka. Skraćivanje odnosno proširenje podataka se vrši na račun najstarijih odbiraka.
9. Vraćanje na korak 2.

V. TESTIRANJE ALGORITMA

Za testiranje algoritma korišćen je signal frekvencije 50 Hz i amplitude 1 r.j. kome se posle deset perioda smanjuje frekvencija na 49,5 Hz a amplituda na 0,9 r.j.. Pored osnovnog harmonika u signalu su prisutni i viši harmonici čije su amplitude i fazni stavovi dati u tabeli 1. Na Sl. 1 prikazan je testiran signal. Amplituda koja se računa LES metodom prikazana je crnom linijom, dok je crvenom linijom predstavljena amplituda test signala izračunata Fourier-ovom metodom.

TABELA I. AMPLITUDE I FAZNI STAVOVI VIŠIH HARMONIKA POSMATRANOG SIGNALA

Red harmonika	Amplituda harmonika [r.j.]	Fazni stav harmonika
3	0,02	10
5	0,05	15
7	0,02	16
11	0,05	30
13	0,02	6



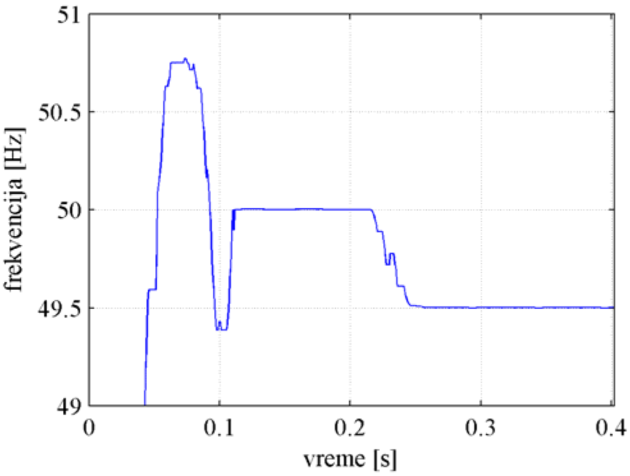
Slika 1. Estimirana amplituda test signala

Sa Sl. 1 se može uočiti da predloženi algoritam daje tačan rezultat posle 2 periode merenog signala. Zahvaljujući brzoj i preciznoj estimaciji veličina predloženi algoritam se može korstiti i za zaštitu i za merenje. Na Sl. 2 prikazana je estimacija frekvencije primenom LES metode.

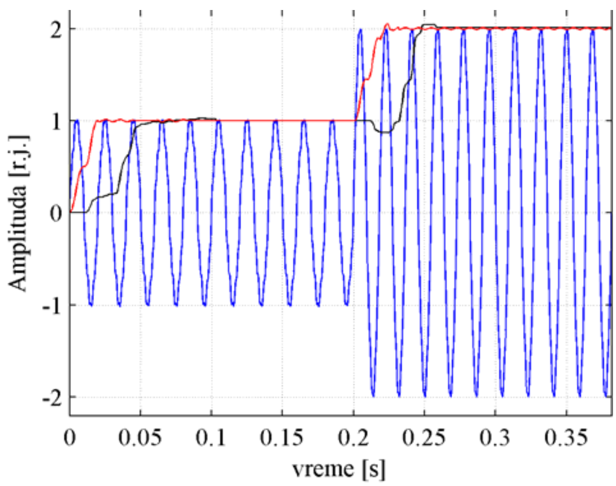
Radi provere robusnosti test signal je modifikovan. Posle deset perioda signala osnovne frekvencije čija je amplituda 1 r.j. i koji je zaprljan višim harmonicima čije su amplitude i fazni stavovi dati u tabeli 1, dolazi do naglog skoka amplitude na 2 r.j. i skoka frekvencije na 55 Hz. Prilikom ove promene usvojeno je da se sadržaj viših harmonika nije menjao. Rezultati predloženog algoritma su prikazani na Sl.3 i Sl.4.

VI. Zaključak

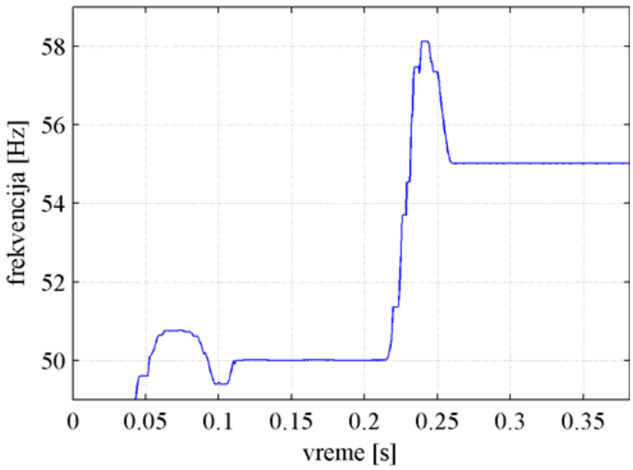
Prikazani algoritam predstavlja novu metodu za određivanje frekvencije i amplitude mernog signala. Korišćenjem samo jedne ortogonalne komponente koja se dobija DFT-om mernog signala algoritam postaje neosetljiv na više harmonike pošto se oni u velikoj meri filtriraju ovom transformacijom. Zbog ove činjenice moguće je uvesti uprošćenje u matricu merenja [*a*] tako da se svi harmonici osim osnovnog mogu zanemariti. Ovim uprošćenjem algoritam dobija na brzini, a da pri tom ne gubi na tačnosti. Poslednja promena koja je uvedena u algoritam, promena širine prozora podataka, ne smanjuje brzinu izvršavanja algoritma a povećava mu tačnost. Brzina algoritma se ne menja pošto se širina prozora menja samo jedanput u toku jedne iteracije, a nova korekcija širine prozora ako je potrebna se dešava u sledećoj iteraciji kada se uzme novi odbirak. Kao što je u primerima i pokazano skokovite promene frekvencije, koje u realnim uslovima nisu moguće, i amplitude nemaju veliki uticaj na tačnost predloženog algoritma.



Slika 2. Estimirana frekvencija test signala



Slika 3. Estimirana amplituda test signala



Slika 4. Estimirana frekvencija test signala

Zahvalnica

Autori zahvaljuju Ministarstvu za nauku i tehnološki razvoj Republike Srbije koje je omogućilo izradu ovog rada u okviru Projekta III 42009 Inteligentne energetske mreže.

Literatura

[1] M. Đurić: „Relejna zaštita“, Beopres, Beograd, 2008.

[2] M. Đurić, Z. Radojević, Ž. Đurišić, V. Terzija: “Algoritmi za digitalne zaštite elektroenergetskih sistema “, Beopres, Beograd 2007.

Abstract—This paper presents an algorithm for estimation of the amplitude and the frequency of measuring signal in the power system, which is based on no recursive Fourier and LES method. The proposed algorithm involves adaptive width of data window. Correction is performed in accordance with a change in the frequenfy of the measuring signal. In this way, there are a significant decrease in measurement error between the frequency of measured signal and anticipated frequency of Fourier algorithm.

ESTIMATION OF THE AMPLITUDE AND THE FREQUENCY COMBINING FOURIER AND LES METHOD

Darko Šošić

Milenko Đurić