INFOTEH-JAHORINA Vol. 9, Ref. B-I-9, p. 163-166, March 2010.

PROCENA MAKSIMALNE AMLITUDE ZA ASIMPTOTSKU OPTIMALNU UNIFORMNU POLARNU KVANTIZACIJU
ASSESSMENT OF MAXIMAL AMPLITUDE FOR ASYMPTOTIC OPTIMAL UNIFORM POLAR QUANTIZATION

Srbislava Savić, *Elektronski fakultet Niš, Srbija*

Sadržaj – *Glavna svrha ovog rada je optimizacija uniformne polarne kvantizacije. Cilj ovog rada je određivanje aproksimativne formule za poluprečnik maksimalne amplitude* $r_{\max}$. *Korišćenjem asimptotske analize uniformne polarne kvantizacije može se odrediti* $r_{\max}$. *Biće dat algoritam za izračunavanje* $r_{\max}$. *Pokazaćemo vrednosti za različite kvantizere. Pokazaćemo i razlike između optimalne vrednosti za* $r_{\max}$ *dobijene numerički i pomoću našeg algoritma, da su te razlike minimalne.*

Abstract – *The main purpose of this paper iz optimization of nuiform polar quantization. The goal of this paper is determination of approximate formula for radius of maximal amplitude* $r_{\max}$. *Using the asymptotic analysis of uniform polar quantization, it can be determinated* $r_{\max}$. *The algorithm for calculating* $r_{\max}$ *will be given. We will show values for different quantizers. We will show differences between optimal values for* $r_{\max}$ *obtained numerically and with our algorithm, too. These differences are minimal.*

1. UVOD

Očigledne su prednosti digitalnog prenosa u odnosu na analogni, i kad se radi o ekonomičnosti, i kad se radi o fleksibilnosti. Značajna je mogućnost obnavljanja originalnog oblika digitalnog signala u impulsnim regeneratorima. Zbog niza prednosti jasno je zašto se vrši digitalizacija signala. Digitalizacija signala je pretvaranje signala u niz impulsa. Jedan od koraka u procesu digitalizacije je kvantizacija. Najjednostavnije rečeno, to je zaokruživanje trenutne vrednosti signala na najbližu dozvoljenu vrednost.

Još uvek je aktuelan problem optimizacije uniformne polarne kvantizacije. U [4] je određivana maksimalna amplituda skalarnog kvantizera. U [1] je vršena analiza uniformne polarne kvantizacije preko Benetovog integrala. U [2] je data analiza uniformnog polarnog kvantizera u odnosu na srednjekvadratnu grešku, tj. u odnosu na granularnu distorziju D_g. [3] daje analizu piece-wise uniformnog produktnog polarnog kvantizera. Nikad nije na odmet naći način optimizacije uniformne polarne kvantizacije.

Mi ćemo u ovom radu opisati jedan način optimizacije. Prednost ovog rada je jednostavna implementacija. Pokazaćemo kako smo dobili algoritam za određivanje optimalne vrednosti za $r_{\max}$ i u isto vreme distorziju učinili optimalnom.

2. UNIFORMNA POLARNA KVANTIZACIJA

Dvodimenzionalno proširenje skalarne kvantizacije je polarna kvantizacija. Karakteristike polarne kvantizacije određuju se na osnovu minimizacije ukupne distorzije, što bi se odnosilo na optimizaciju vrednosti amplitudskih nivoa i celobrojnih vrednosti broja tačaka na svakom nivou za dvodimenzionalni kvantizer.

Koristimo uniformni polarni kvantizer od L amplitudskih nivoa i M_i rekonstrukcionih faznih nivoa m_i, $1 \le i \le L$. Amplitudski opseg $[0, r_L]$ delimo na prstenove amplitude sa L nivoa odlučivanja r_i, $1 \le i \le L$. To znači da je ispunjeno $1 < r_1 < r_2 < r_3 < \ldots < r_{L+1} < r_{\max}$ i $1 < m_1 < m_2 < m_3 < \ldots < m_L$ za amplitudne rekonstrukcione nivoe. Svaki amplitudni prsten delimo na M_i faznih podgrupa.

Posmatramo dva susedna nivoa odlučivanja. Neka su $\varphi_{i,j}$ i $\varphi_{i,j+1}$ ti nivoi odlučivanja. Neka je $\psi_{i,j}$ j-ti fazni rekonstrukcioni nivo za i-ti amplitudni prsten. Pri tome za j važi $1 \le j \le M_i$. Tada je

$$\varphi_{i,j} = (j-1)\frac{2\pi}{M_i} \tag{1}$$

$$\psi_{i,j} = (2j-1)\frac{\pi}{M_i} \tag{2}$$

Određujemo granularnu distorziju jedne ćelije, a zatim ćemo sumiranjem po svim ćelijama dobiti ukupnu granularnu distorziju polarne kvantizacije. Koristimo Gausovu raspodelu i, bez umanjivanja opštosti, uzimamo za varijansu $\sigma^2 = 1$.

Po definiciji distorzija je:

$$D_g = \sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{M_i}\int_{\varphi_{i,j}}^{\varphi_{i,j+1}}\int_{r_i}^{r_{i+1}}\left[r^2 + m_i^2 - 2rm_i\cos(\phi-\psi_{i,j})\frac{f(r)}{2\pi}\right]drd\phi \tag{3}$$

$$D_{i,j} = \frac{1}{2}\int_{R_{i,j}}\left[r^2 + m_i^2 - 2rm_i\cos(\phi-\psi_{i,j})\frac{f(r)}{2\pi}\right]drd\phi \tag{4}$$

$$D_{i,j} = p(r,\varphi)NM\left(R_{i,j}M_{i,j}\right)\left[vol\left(R_{i,j}\right)\right]^2 \tag{5}$$

Funkcija gustine raspodele je $p(r,\varphi) = \dfrac{f(r)}{2\pi}$.

$NM\left(R_{i,j}M_{i,j}\right)$ je moment inercije i definiše se kao:

$$NM\left(R_{i,j}M_{i,j}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{\left[vol\left(R_{i,j}\right)\right]^2}\int_{R_{i,j}}\left[r^2 + m_i^2 - 2rm_i\cos(\phi-\psi_{i,j})\right]drd\phi \tag{6}$$

Kako je uniformni polarni kvantizer dvodimenzionalan, zapremina ćelije se svodi na njenu površinu:

$$vol\left(R_{i,j}\right) = \frac{2m_i\Delta\pi}{P_i} \tag{7}$$

gde je $\Delta = \dfrac{r_{\max}}{L}$, a P_i je broj tačaka na jednom amplitudnom nivou.

Sređivanjem izraza dobija se izraz za izračunavanje distorzije jedne ćelije:

$$D_{i,j} = \frac{1}{12}\frac{\Delta}{P_i}\left(\frac{\Delta^2}{2} + \frac{2m_i^2\pi^2}{P_i^2}\right)f(r) \tag{8}$$

Sumiranjem po svim ćelijama amplitudnog nivoa i po svim amplitudnim nivoima, dobija se konačan izraz za granularnu distorziju polarne kvantizacije:

$$D_g^{pol} = \sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{P_i}D_{i,j} = \sum_{i=1}^{L}P_iD_{i,j} = = \sum_{i=1}^{L}\frac{1}{12}\Delta\left(\frac{\Delta^2}{2} + \frac{2m_i^2\pi^2}{P_i^2}\right)f(m_i) \tag{9}$$

Aproksimativnom analizom dobija se sledeći izraz za izračunavanje distorzije uniformne polarne kvantizacije:

$$D_g = \frac{\sqrt{3}\pi}{2N}\left(1 - e^{-\frac{r_{\max}^2}{6}}\right)^{\frac{3}{2}} \tag{10}$$

$r_{\max}$ je poluprečnik gornje granične linije poslednjeg prstena. $r_{\max}$ zavisi od broja amplitudnih nivoa L na sledeći način:

$$r_{\max} = 2\sqrt{\ln L} \tag{11}$$

gde je $L = \sqrt{\dfrac{N}{2}}$, a N je broj kvantnih nivoa.

Naš problem možemo formulisati na sledeći način: neophodno je naći izvod $\dfrac{\partial D}{\partial r_{\max}}$ i postaviti uslov $\dfrac{\partial D}{\partial r_{\max}} = 0$.

Totalna distorzija jednaka je sumi granularne distorzije i overload distorzije $D = D_g + D_0$. D_g je granularna distorzija, D_0 je overload distorzija. Granularna distorzija je unutar oblasti kvantizera, za šta podrazumevamo interval gde je greška kvantizacije mala. Zato je veći izazov uključiti overload distorziju u proceni predloga za optimizaciju. Za granularnu distorziju koristimo formulu:

$$D_g = \frac{\sqrt{3}\pi}{2N}\left(1 - \frac{3}{2}e^{-\frac{r_{\max}^2}{6}}\right) \tag{12}$$

Overload distorziju dobijamo iz izraza

$$D_0 = \int_{r_{\max}}^{\infty} re^{-\frac{r^2}{2}}\left[\left(r - m_L\right)^2 + \frac{rm_L\pi^2}{3P_L^2}\right]dr \tag{13}$$

m_L je srednja linija L-tog prstena

$$m_L = \frac{r_{\max}}{L}\left(L + \frac{1}{2}\right) \tag{14}$$

P_L je broj faznih nivoa L-tog prstena:

$$P_L = \frac{Nm_L r_{\max}}{3\left(1 - e^{-\frac{r_{\max}^2}{6}}\right)L}e^{-\frac{m_L^2}{6}} \tag{15}$$

Totalna distorzija je:

$$D = D_g + D_0 = = \frac{\sqrt{3}\pi}{2N}\left(1 - \frac{3}{2}e^{-\frac{r_{\max}^2}{6}}\right) + \int_{r_{\max}}^{\infty} re^{-\frac{r^2}{2}}\left[\left(r - m_L\right)^2 + \frac{rm_L\pi^2}{3P_L^2}\right]dr \tag{16}$$

3. ALGORITAM ZA ODREĐIVANJE OPTIMALNE VREDNOSTI ZA $r_{\max}$

U ovom delu rada odredićemo optimalnu vrednost za $r_{\max}$.

Algoritam izgleda ovako:

1. korak: Tražimo parcijalni izvod $\frac{\partial D}{\partial r_{\max}}$ i postavljamo uslov $\frac{\partial D}{\partial r_{\max}} = 0$:

$$\frac{\partial D}{\partial r_{\max}} = \frac{\partial \mathrm{D_g}}{r_{\max}} + \frac{\partial \mathrm{D_0}}{r_{\max}} = 0 \tag{17}$$

$$\frac{\sqrt{3}\pi}{4N} e^{-\frac{r_{\max}^2}{6}} - e^{-\frac{r_{\max}^2}{2}} r_{\max}^2 \left[\left(1 - \frac{L+\frac{1}{2}}{L} \right)^2 + \frac{\pi^2 \left(L + \frac{1}{2} \right)}{3 P_L^2 L} \right] = 0 \tag{18}$$

Zbog lakšeg pisanja koristićemo zamene:

$$A = \frac{\sqrt{3}\pi}{4N} \tag{19}$$

$$B = \left[\left(1 - \frac{L+\frac{1}{2}}{L} \right)^2 + \frac{\pi^2 \left(L + \frac{1}{2} \right)}{3 P_L^2 L} \right] \tag{20}$$

2. korak: Sada treba da rešimo jednačinu:

$$A e^{-\frac{r_{\max}^2}{6}} - B r_{\max}^2 e^{-\frac{r_{\max}^2}{2}} = 0 \tag{21}$$

Ideja je da se eksponencijalni deo razvije u Tejlorov red

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'}{1!}(x-a) + \frac{f''}{2!}(x-a)^2 + \ldots \tag{22}$$

u okolini tačke $r_{\max_0}$, koja je prvo rešenje za $r_{\max}$:

$$r_{\max_0} = 2\sqrt{\ln\sqrt{\frac{N}{2}}} \tag{23}$$

a mi uzimamo prva dva člana:

$$e^{-\frac{r_{\max}^2}{6}} = e^{-\frac{a^2}{6}} - \frac{a}{3} e^{-\frac{a^2}{3}} (x-a) = e^{-\frac{a^2}{6}} \left(1 + a^2 - \frac{a}{3} x \right)$$

$$e^{-\frac{r_{\max}^2}{2}} = e^{-\frac{a^2}{2}} - a e^{-\frac{a^2}{2}} (x-a) = e^{-\frac{a^2}{2}} \left(1 + a^2 - a x \right)$$

3. korak: Koristeći ovaj razvoj dobijamo jednačinu trećeg stepena:

$$B a e^{-\frac{a^2}{2}} r_{\max}^3 - B\left(1+a^2\right) e^{-\frac{a^2}{2}} r_{\max}^2 - A \frac{a}{3} e^{-\frac{a^2}{6}} r_{\max} + A \left(1 + \frac{a^2}{3} \right) e^{-\frac{a^2}{6}} = 0 \tag{24}$$

4. korak: Korak 4 je rešavanje jednačine za određeni kvantizer.

4. NUMERIČKI REZULTATI

Daćemo rezultate za kvantizer sa $N = \{64, 128, 256, 512\}$ kvantnih nivoa.

Rezultati određivanja $r_{\max}$ su dati u Tabeli. Pre nego što odredimo $r_{\max}$, moramo da izračunamo parametre: $r_{\max_0}$, L, m_{L_0}, P_L, A, B iz sledećih jednačina:

$$a = r_{\max_0} = 2\sqrt{\ln\sqrt{\frac{N}{2}}}$$

$$L = \sqrt{\frac{N}{2}}$$

$$m_{L_0} = \frac{r_{\max_0}}{L} \left(L + \frac{1}{2} \right)$$

$$P_L = \frac{N m_L r_{\max_0}}{3 \left(1 - e^{-\frac{r_{\max_0}^2}{6}} \right) L} e^{-\frac{m_{L_0}^2}{6}}$$

$$A = \frac{\sqrt{3}\pi}{4N}$$

$$B = \left[\left(1 - \frac{L+\frac{1}{2}}{L} \right)^2 + \frac{\pi^2 \left(L + \frac{1}{2} \right)}{3 P_L^2 L} \right]$$

Tabela. Rezultati određivanja $r_{\max}$ za različite polarne kvantizere

N	64	128	256	512
$r_{\max_0}$	2.633	2.884	3.115	3.33
L	5	8	11	16
m_{L_0}	2.896	3.064	3.256	3.434
P_L	11	13	16	20
A	0.0213	0.011	0.005314	0.00266
B	0.0399	0.0246	0.0155	0.00946
$r_{\max}$	2.7839	2.9747	3.2039	3.3195
$r_{\max_{numerical}}$			3.22	3.46

5. ZAKLJUČAK

U ovom radu dali smo jednostavan algoritam za izračunavanje vrednosti za $r_{\max}$. Zatim smo dali rešenja za različite kvantizere. Rezultati pokazuju da su razlike između optimalnih vrednosti za $r_{\max}$, nađenih numerički i pomoću našeg algoritma, minimalne. Znači, slažemo se sa rešenjem optimizacije uniformne polarne kvantizacije u odnosu na distorziju.

LITERATURA

[1] Stojanović D. A, Aleksić D. R. i Perić Z. H, Joovanović A. Z. *Analysis of Uniform Polar Quantization over Bennett's Integral*, ISSN 1392-1215 ELEKTRONIKA IR ELEKTROTECHNIKA.. –2005. – Nr. 8(64) – T170 ELEKTRONIKA

[2] Perić Z. H i Stefanović M. Č. *Asymptotic Analysis of Optimal Uniform Polar Quantization*, International Journal of Electronics and Communications. – 2002. – Vol.56. – P. 345–347.

[3] Perić Z. H, Bogosavljević S. M. *Asymptotic Analysis of Piece-Wise Uniform Product Polar Quantizers*, Journal of ELLECTRICAL ENGINEERING. –2004. – Vol. 55. – P. 105-108.

[4] Perić Z. H.., Nikolić J., Pokrajac D. *Estimation of the Support Region for Laplacian Source Scalar Quantizers* // Journal of ELLECTRICAL ENGINEERING. –2007. – Vol. 58. – P. 47-51.