

## ANALIZA MODELA KOMPOZITNOG FEDINGA ANALYSIS OF COMPOUND FADING MODEL

Bojana Nikolić, Goran Đorđević, Dejan Milić, Aleksandra Cvetković, *Elektronski fakultet u Nišu*

**Sadržaj** - U bežičnim kanalima sa kompozitnim fedingom anvelope fedinga ima Nakagami- $m$  funkciju gustine verovatnoće, pri čemu srednja snaga u Nakagami- $m$  raspodeli ima log-normalnu funkciju gustine verovatnoće. Tako dobijen kompozitni feding ima složenu funkciju gustine verovatnoće u integralnom obliku, pa se u literaturi sreće aproksimacija log-normalne raspodele gama raspodelom. Dobijeni kompozitni feding u tom slučaju ima generalizovanu  $K$  raspodelu. U cilju daljeg pojednostavljenja izračunavanja, učinjena je još jedna aproksimacija koja generalizovanu  $K$  raspodelu zamenjuje gama raspodelom sa  $\varepsilon$  korekcijom. U ovom radu biće razmatrana relevantnost primenjenih aproksimacija na osnovu sračunate kumulativne gustine verovatnoće (cdf), gustine verovatnoće (pdf) i verovatnoće prekida veze ( $P_{\text{outage}}$ ). Takođe će biti utvrđena ograničenja u primeni citiranih aproksimacija.

**Abstract** - In wireless transmission over compound fading channels, signal envelope follows Nakagami- $m$  distribution, while average power in Nakagami distribution has log-normal probability density function. A probability density function of this compound fading is rather complex and has an integral form. Thus, an approximation of log-normal distribution by a gamma distribution has been proposed in the literature. The obtained compound fading, then, follows generalize  $K$  distribution. In order to simplify further calculations, another approximation has been made. Generalized  $K$  distribution is replaced by gamma distribution with  $\varepsilon$  correction. In this paper a relevance of the applied approximations will be considered, based on calculated cumulative density function (cdf), probability density function (pdf) and outage probability ( $P_{\text{outage}}$ ). Also, the limitations in implementation of these approximations will be determined.

### 1. UVOD

U bežičnim komunikacijama, usled prostiranja po više putanja, signal na prijemu je često zahvaćen efektom brzog fedinga, tj. fluktuacije trenutne vrednosti signala. Takođe, usled same prirode propagacionog okruženja (profil zemljišta, zgrade, vegetacija), može doći i do pojave sporog fedinga, odnosno, efekta senke. U određenim propagacionim okruženjima potrebno je modelovati kanal kompozitnom raspodelom efekta senke i fedinga. Primer za to je urbano područje, kao što je centar grada sa gustim saobtačajem i velikim brojem korisnika koji se sporo kreću, gde se feding javlja sa promenljivom srednjom snagom. Opšte prihvaćeni model kompozitnog fedinga, koji opisuje uslove propagacije pri jednovremenom delovanju oba navedena efekta, pretpostavlja Nakagami- $m$  funkciju raspodele anvelope signala (odnosno gama funkciju raspodele trenutnog odnosa signal-šum) i log-normalnu funkciju raspodele srednje snage signala. Kompozitna funkcija gustine verovatnoće, dobijena korišćenjem pomenutog modela, je prilično složena i u integralnom je obliku, što onemogućava dobijanje srednje verovatnoće greške i verovatnoće prekida veze u zatvorenom obliku. Zato se u literaturi sreće aproksimacija log-normalne raspodele gama raspodelom [1], [2], [3]. Dobijeni kompozitni feding u tom slučaju ima generalizovanu  $K$  raspodelu. U cilju daljeg pojednostavljenja izračunavanja, učinjena je još jedna aproksimacija koja generalizovanu  $K$  raspodelu zamenjuje gama raspodelom sa  $\varepsilon$  korekcijom [4]. U ovom radu biće razmatrana relevantnost primenjenih aproksimacija na osnovu sračunate kumulativne funkcije raspodele verovatnoće (cdf), gustine verovatnoće (pdf) i verovatnoće prekida veze ( $P_{\text{outage}}$ ). Takođe će biti utvrđena ograničenja u primeni citiranih aproksimacija.

### 2. MODEL KOMPOZITNOG FEDINGA

Anvelope primljenog signala, koji se prostire po više putanja, može se modelovati prilično opštom Nakagami- $m$  raspodelom. Tada funkcija gustine verovatnoće (pdf) snage primljenog signala  $\gamma$ , uslovljena po srednjoj snazi, prati Gama raspodelu:

$$p_{\gamma/\Omega}(\gamma) = \frac{1}{\Gamma(m_m)} \cdot \left(\frac{m_m}{\Omega}\right)^{m_m} \gamma^{m_m-1} \exp\left(-\frac{m_m \gamma}{\Omega}\right), \quad (1)$$

gde je  $\Omega = \bar{\gamma}$  srednji SNR, a  $m_m$  parametar fedinga. Gama funkcija je označena sa  $\Gamma(\cdot)$  [5, (8.310/1)]. Fluktuacija sporog fedinga ima lognormalnu raspodelu:

$$p_{\Omega}(\Omega) = \frac{1}{\Omega \sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(\ln \Omega - a)^2}{2\sigma^2}\right), \quad \Omega \geq 0 \quad (2)$$

gde  $a$  i  $\sigma$  predstavljaju srednju vrednost i standardnu devijaciju veličine  $\ln(\Omega)$ , respektivno. Funkcija  $\ln(\cdot)$  predstavlja prirodni logaritam. Vrednosti  $a$  i  $\sigma$  su date u neperima, pa, ako se želi da se ove veličine zadaju u dB, treba iskoristiti relacije  $\sigma_{dB} = 20\sigma \log_{10} e$  i  $a_{dB} = 20a \log_{10} e$ .

Pdf kompozitnog SNR-a se može dobiti kao:

$$p_{\gamma}(\gamma) = \int_0^{+\infty} p_{\gamma/\Omega}(\gamma) p_{\Omega}(\Omega) d\Omega \quad (3)$$

Pošto tako dobijena pdf nije pogodna za dalja izračunavanja, predloženo je [1], [4] da se lognormalna raspodela, koja opisuje spori feding, aproksimira gama raspodelom oblika:

$$p_{\Omega}(\Omega) = \frac{1}{\Gamma(m_s)} \left(\frac{m_s}{\Omega_s}\right)^{m_s} \Omega^{m_s-1} \exp\left(-\frac{m_s \Omega}{\Omega_s}\right), \quad \Omega \geq 0, m_s > 0 \quad (4)$$

gde je parametar  $m_s$  parametar fedinga (faktor oblika), a  $\Omega_s$  je mera srednje snage (faktor razmere). Metodom poklapanja momenata dobijena je veza između parametara lognormalne i gama raspodele sporig fedinga:

$$\sigma = \sqrt{\ln \frac{m_s + 1}{m_s}} \quad (5)$$

$$a = \ln \left( \Omega_s \sqrt{\frac{m_s}{m_s + 1}} \right). \quad (6)$$

Kada se (1) i (4) zameni u (3) dobija se:

$$p(\gamma) = \frac{2}{\Gamma(m_m)\Gamma(m_s)} \left( \frac{m_m m_s}{\Omega_s} \right)^{\frac{m_m + m_s}{2}} \gamma^{\frac{m_m + m_s}{2} - 1} \quad (7)$$

$$\times K_{m_s - m_m} \left( 2 \sqrt{\gamma \frac{m_m m_s}{\Omega_s}} \right), \quad \gamma \geq 0, m_s > 0, m_m \geq 0.5.$$

Raspodela (7) poznata je kao generalizovana K raspodela. Mnogi autori, međutim, smatraju da ni ova raspodela srednjeg SNR signala zahvaćenog kompozitnim fedingom nije najpogodnija za dalja izračunavanja [4], pa se pojavila ideja da se ova raspodela, aproksimira novom gama raspedelom oblika:

$$p(\gamma) = \frac{1}{\Gamma(k)} \left( \frac{k}{\theta} \right)^k \gamma^{k-1} \exp\left(-\frac{k\gamma}{\theta}\right), \quad \gamma \geq 0, k > 0, \quad (8)$$

gde je  $k$  faktor oblika, a  $\theta$  faktor razmere. Metodom poklapanja momenata dobijena je veza između parametara generalizovane K raspodele i gama raspodele kompozitnog fedinga:

$$\theta = \left[ \frac{(m_m + 1)(m_s + 1)}{m_m m_s} - 1 \right] \Omega_s, \quad \theta > 0, \quad (9)$$

$$k = \frac{1}{\frac{(m_m + 1)(m_s + 1)}{m_m m_s} - 1}, \quad k > 0. \quad (10)$$

Daljim ispitivanjem je utvrđeno da gama raspodela ne prati generalizovanu K raspodelu podjednako dobro u svim oblastima vrednosti srednjeg SNR, pa je predložena modifikacija [4]. Naime, uveden je parametar korekcije  $\varepsilon$ , tako da je sada veza između parametara dve raspodele:

$$\theta = \left[ \frac{(m_m + 1)(m_s + 1)}{m_m m_s} - 1 - \varepsilon \right] \Omega_s, \quad (11)$$

$$k = \frac{1}{\frac{(m_m + 1)(m_s + 1)}{m_m m_s} - 1 - \varepsilon}, \quad (12)$$

$$\theta > 0, k > 0, -\infty \leq \varepsilon \leq \frac{(m_m + 1)(m_s + 1)}{m_m m_s} - 1.$$

Da bi se ustanovila relevantnost pomenutih aproksimacija, u radu će biti sračunate (pored pdf) cdf kompozitnog fedinga i verovatnoće prekida veze, korišćenjem sledećih izraza, respektivno:

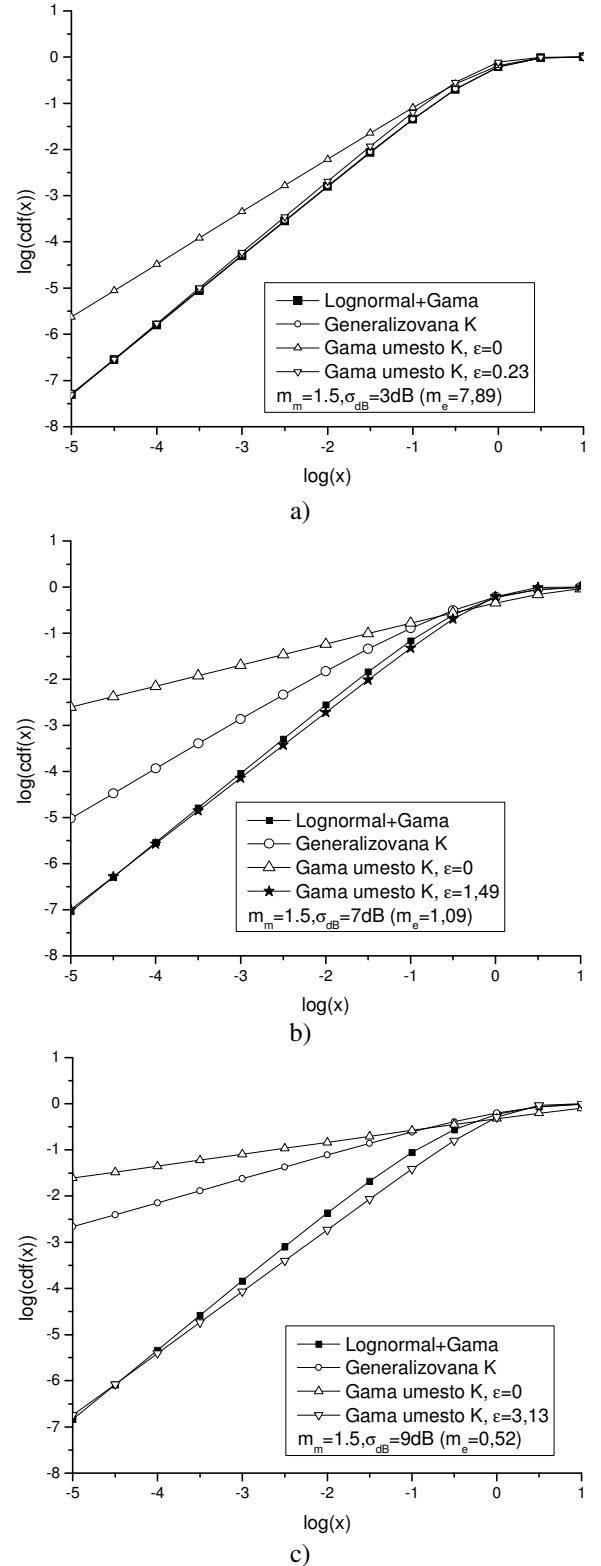
$$f(x) = \int_0^x p(t) dt \quad (13)$$

$$P_{outage} = \int_0^{\gamma_\tau} p(t) dt \quad (14)$$

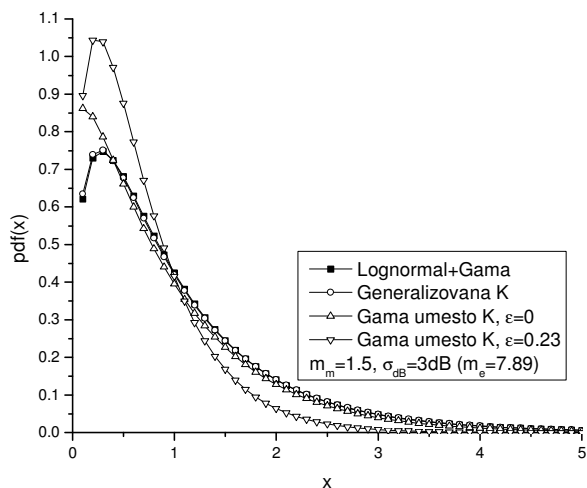
gde je  $\gamma_\tau$  prag prekida veze.

### 3. NUMERIČKI REZULTATI

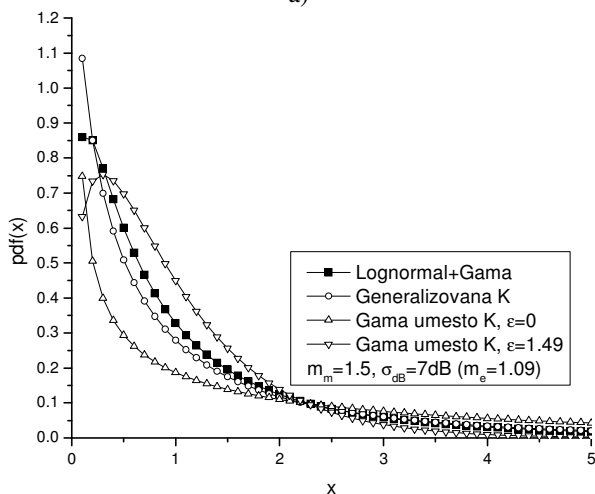
Korišćenjem (13) sračunate su cdf funkcije za kompozitni feding kada je pdf dobijeno: pomoću (3) (na slikama označeno sa *Lognormal+Gama*), pomoću (7) (na slikama označeno sa *generalizovana K*) i korišćenjem (8) za različite vrednosti parametra korekcije (na slikama označeno sa *Gama umesto K*).



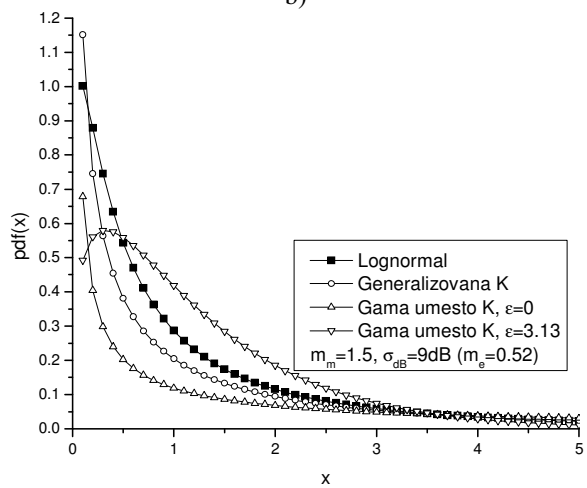
Sl. 1. Kumulativna funkcija raspodele verovatnoće  
a)  $\sigma_{dB}=3dB$ , b)  $\sigma_{dB}=7dB$ , c)  $\sigma_{dB}=9dB$



a)



b)

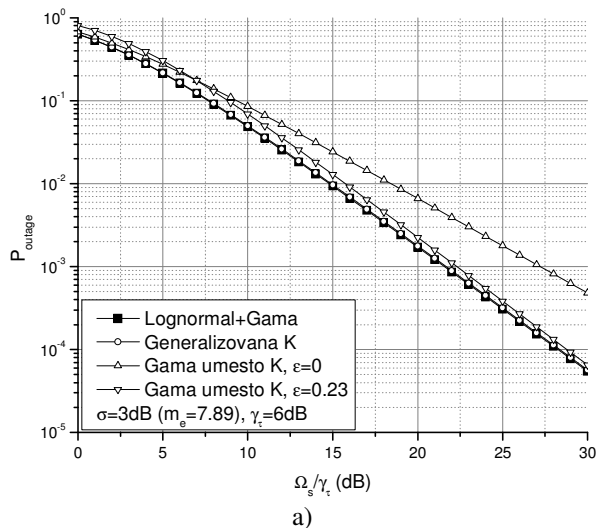


c)

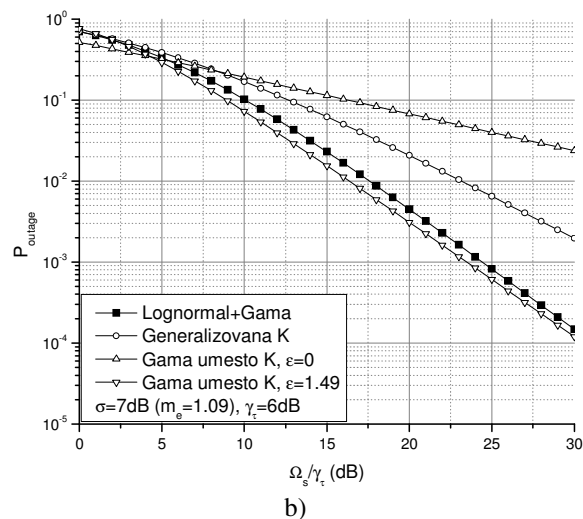
Sl. 2. Gustina verovatnoće  
a)  $\sigma_{dB}=3dB$ , b)  $\sigma_{dB}=7dB$ , c)  $\sigma_{dB}=9dB$

Ove cdf funkcije prikazane su na slici 1 za različite vrednosti parametra  $\sigma$ . Odgovarajuće pdf funkcije date su na slici 2, respektivno. U praksi, vrednosti  $\sigma$  se obično kreću u opsegu  $3dB \leq \sigma_{dB} \leq 9dB$  [3], [6], tako da su upravo vrednosti iz ovog opsega razmatrane u radu. Za male vrednosti parametra  $\sigma$  ( $\sigma_{dB}=3dB$ , Sl.1a) postiže se najbolje poklapanje rezultata dobijenih na krivama *Lognormal+Gama* i *generalizovana K*, dok kriva *Gama umesto K* ( $\epsilon=0$ ) pokazuje najveće odstupanje. Sa porastom vrednosti parametra  $\sigma$

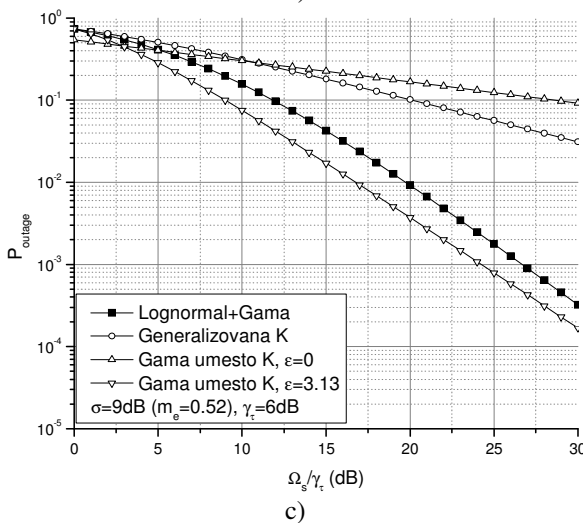
(Sl.1b, Sl.1c) kriva *generalizovana K* sve više odstupa od krive *Lognormal+Gama*, čija je aproksimacija. U tim slučajevima opravdano je uvođenje aproksimacije *Gama umesto K* sa korekcijom. Ipak, i ova aproksimacija može samo za  $\sigma_{dB} \leq 7dB$  uspešno zameniti originalnu raspodelu, dok je za veće vrednosti (slika 1c), prati na pojedinim segmentima.



a)



b)

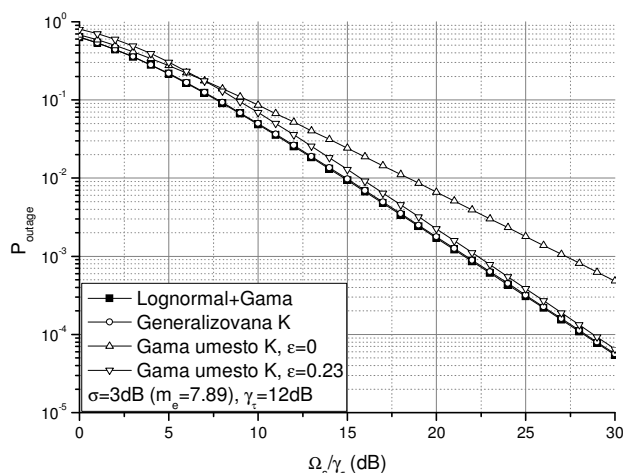


c)

Sl. 3. Verovatnoća prekida veze u zavisnosti od srednje snage  
a)  $\sigma_{dB}=3dB$ , b)  $\sigma_{dB}=7dB$ , c)  $\sigma_{dB}=9dB$

Na slici 3 prikazane su verovatnoće prekida veze u funkciji srednje snage za različite vrednosti parametra  $\sigma$ . Slici 3a odgovara  $\sigma_{dB}=3dB$ , slici 3b  $\sigma_{dB}=7dB$  i slici 3c  $\sigma_{dB}=9dB$ . Prag prekida veze ima vrednost  $\gamma_t=6dB$ . Kao što se može primetiti, tendencije uočene na slici 1, preslikavaju se i na verovatnoću prekida veze.

Za male vrednosti parametra  $\sigma$ , upotreba aproksimacije generalizovana K daje sasvim zadovoljavajuće poklapanje što se tiče verovatnoće prekida veze sa slučajem kada se koristi Lognormal+Gama, za koju se u literaturi smatra da realno opisuje dati kompozitni feding. Sa porastom vrednosti  $\sigma$ , ovo poklapanje je sve manje, tako da postoji sve veća potreba za uvođenjem novih aproksimacija. Na slici se vidi da uvođenje aproksimacije Gama umesto K sa korekcijom ( $\varepsilon \neq 0$ ) daje najbolje rezultate.



Sl.4. Verovatnoća otkaza u zavisnosti od srednje snage

Na slikama 3a i 4 može se pratiti uticaj praga prekida veze na verovatnoću prekida veze i slaganje učinjenih aproksimacija sa originalnim rezultatima. Na slici 3a vrednost praga prekida veze je  $\gamma_t=6dB$ , dok za sliku 4 važi  $\gamma_t=12dB$ . Vrednost svih ostalih parametara na dvema slikama je isti. Može se primetiti da povećanje vrednosti  $\gamma_t$  ne utiče na stepen slaganja primenjenih aproksimacija, već da samo dovodi do kvarenja ukupnih performansi sistema, konkretno povećanja verovatnoće prekida veze.

#### 4. ZAKLJUČAK

U bežičnim kanalima često je prisutan kompozitni feding koji podrazumeva gama funkciju raspodele trenutnog odnosa signal-šum i log-normalnu funkciju raspodele srednje snage signala. Zbog svoje složenosti, ova kompozitna raspodela se

često zamenjuje aproksimacijama koje su prisutne u literaturi. U ovom radu je razmatrana relevantnost primene tih aproksimacija za gustinu raspodele kompozitnog fedinga na osnovu slaganja cdf i verovatnoće prekida veze ( $P_{outage}$ ). Pokazalo se da za male vrednosti parametra  $\sigma$  postoji dobro poklapanje odgovarajućih cdf i  $P_{outage}$  aproksimacije generalizovana K sa istim veličinama koje se odnose na raspodelu Lognormal+Gama, u celom opsegu posmatranja. Za velike vrednosti  $\sigma$ , cdf i  $P_{outage}$  aproksimacije generalizovana K značajno odstupaju od vrednosti koje se smatraju tačnim i u tom slučaju aproksimacija Gama umesto K sa korekcijom daje vrednosti bliže realnim. Pri tome treba voditi računa o izboru  $\varepsilon$ , kako se ne bi dobili u velikoj meri bolji rezultati.

#### ZAHVALNICA

Rad je delimično finansiran sredstvima Ministarstva za nauku i tehnološki razvoj Republike Srbije, u okviru projekta "Razvoj i realizacija nove generacije softvera, hardvera i usluga na bazi softverskog radija za namenske aplikacije", Ev. br. 11030.

#### LITERATURA

- [1] A. Abdi and M. Kaveh, "K distribution: An appropriate substitute for Rayleigh-lognormal distribution in fading-shadowing wireless channels," *Electron. Lett.*, Vol. 34, No. 9, pp. 851-852, 1998
- [2] P. M. Shankar, "Error Rates in Generalized Shadowed Fading Channels," *Wireless Personal Communications*, pp. 233-238, 2004
- [3] I. M. Kostić, "Analytical approach to performance analysis for channel subject to shadowing and fading," *IEE Proc.-Commun.*, Vol.152, No.6, pp. 821-827, December 2005
- [4] S. Al-Ahmadi and H. Yanikomeroglu, On the Approximation of the Generalized-K PDF by a Gamma PDF Using the Moment Matching Method, In Proc. *IEEE WCNC2009*, 978-1-4244-2948-6/09/, 2009.
- [5] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, VI izdanje, New York: Academic, 2000.
- [6] I. M. Kostić, Prilog analitičkom opisu statistike brzog i sporog fedinga, In Proc. *INFOTEH Conference*, Vol.2, pp. 143-146, March 2002.