

## ODREĐIVANJE MAKSIMALNE OSJETLJIVOSTI NA OSNOVU FUNKCIJE KOMPLEMENTARNE OSJETLJIVOSTI I OBRNUTO U SISTEMIMA UPRAVLJANJA

Tomislav B. Šekara<sup>(1)</sup>, Vidan Govedarica<sup>(2)</sup>

<sup>1)</sup>Elektrotehnički fakultet u Beogradu [tomi@etf.rs](mailto:tomi@etf.rs),

<sup>2)</sup>Elektrotehnički fakultet u I. Sarajevu [vidangov@yahoo.com](mailto:vidangov@yahoo.com)

**Sadržaj** - U radu je analizirano određivanje maksimalne osjetljivosti  $M_s$  kod sistema upravljanja na osnovu funkcije komplementarne osjetljivosti  $T$  i obrnuto, tj. određivanje maksimalne komplementarne osjetljivosti  $M_p$  na osnovu funkcije osjetljivosti  $S$  sistema upravljanja. Ove dvije funkcije  $T$  i  $S$  su veoma važne u projektovanju sistema upravljanja. Zbog toga je u ovom radu, uz adekvatnu matematičku analizu i jednu parametrizaciju, data nova fizička predstava njihovog međusobnog odnosa.

**Abstract** – Calculation of the maximum sensitivity  $M_s$  in feedback systems from the complementary sensitivity function  $T$ , and vice versa, i.e. calculation of the maximum complementary sensitivity  $M_p$  from the sensitivity function  $S$  is analyzed in this paper. Based on an adequate mathematical analysis and a parameterization, a new physical insight into their mutual relationship is established.

**Ključne riječi** – Sistemi upravljanja, Frekvencijski domen, Funkcije osjetljivosti

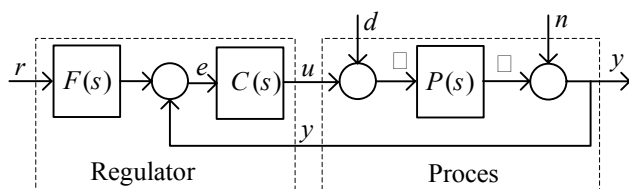
**Key words** – Control systems, Frequency domain, Sensitivity functions

### 1. Uvod

U sistemima upravljanja od velikog interesa je funkcija osjetljivosti  $S$  spregnutog sistema i funkcija komplementarne osjetljivosti  $T$ . U ovom radu daće se osnovne definicije ovih funkcija i osnovna njihova fizička predstava [1,2]. Osim osnovne veze među ovim funkcijama  $T+S=1$ , biće pokazano određivanje maksimalne osjetljivosti na osnovu funkcije komplementarne osjetljivosti i obratno.

Ispitivanje osjetljivosti sistema automatskog upravljanja u osnovi se svodi na procjenu uticaja promjene parametara procesa na stanje sistema. Sistem automatskog upravljanja je bolji (robustniji) ukoliko je njegova komplementarna funkcija osjetljivosti  $T$  po svim frekvencijama mala, tj. ukoliko promjena parametara procesa manje utiče na stanje sistema.

Za posmatranu blok šemu sistema upravljanja sa slike 1, za ulazne veličine  $r$ ,  $d$  i  $n$  u odnosu na izlazne veličine  $y$ ,  $\eta$ ,  $v$ ,  $u$  i  $e$  data je matrica funkcije prenosa relacijom (1).



Slika 1. Blok struktura sistema upravljanja

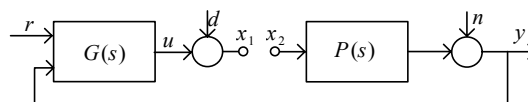
$$\begin{bmatrix} y \\ \eta \\ v \\ u \\ e \end{bmatrix} = \frac{1}{1+PC} \begin{bmatrix} PCF & P & 1 \\ PCF & P & -PC \\ CF & 1 & -C \\ CF & -PC & -C \\ F & -P & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ d \\ n \end{bmatrix} \quad (1)$$

Napomenimo da u opštem slučaju funkcija povratnog prenosa nije jedinstvena, pa se mora voditi strogo računa o

tome koju funkciju povratnog prenosa uzeti u cilju definisanja  $S$  ili  $T$ . Za blok strukturu sa slike 1 funkcija povratnog prenosa je očigledna i data je relacijom

$$L(s) = C(s)P(s). \quad (2)$$

Da bi se pravilno definisale funkcije  $S$  ili  $T$  potrebno je odrediti funkciju prenosa  $\beta(s)=X_2(s)/X_1(s)$  na osnovu slike 2, pod uslovom da su svi ostali ulazi u sistem identički jednaki nuli.



Slika 2.

Tada je adekvatna funkcija povratnog prenosa

$$L(s) = -\beta(s). \quad (3)$$

Tačke prekida povratne konture  $x_1$  i  $x_2$  moraju strogo biti na ulazu u model procesa. U elektronici se često funkcija  $\beta(s)$  naziva i kružno pojačanje. Na ovaj način je izbjegnuta nedoumica u vezi funkcije povratnog prenosa u cilju definisanja  $S$  ili  $T$ .

Funkcija osjetljivosti  $S$  je definisana relacijom

$$S(s) = 1/(1+L(s)), \quad (4)$$

dok je funkcija komplementarne osjetljivosti  $T$  definisana relacijom

$$T(s) = 1 - S(s) = L(s)/(1+L(s)). \quad (5)$$

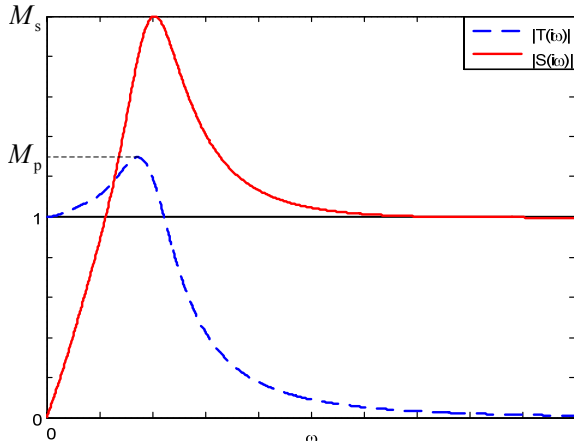
Postoje i druge veze između funkcija  $S$  i  $T$ , kao što su

$$S = \frac{\partial T}{\partial L} \frac{L}{T} = \frac{1}{1+L}. \quad (6)$$

Ova veza (6) ima svoje fizičko tumačenje. Ako  $T$  ujedno predstavlja i funkciju spregnutog prenosa tada je osjetljivost spregnutog prenosa u odnosu na funkciju povratnog prenosa jednaka funkciji osjetljivosti  $S$ .

Posebno istaknimo da funkcija spregnutog prenosa nije jednaka funkciji komplementarne osjetljivosti  $T$ , osim u specijalnim slučajevima. Ovo često unosi zabunu u široj stručnoj i naučnoj literaturi.

Tipične amplitudske karakteristike  $S$  i  $T$  funkcija u zavisnosti od kružne učestanosti su date na slici 3,



Slika 3. Tipične amplitudske karakteristike  $S$  i  $T$  funkcija u zavisnosti od kružne učestanosti

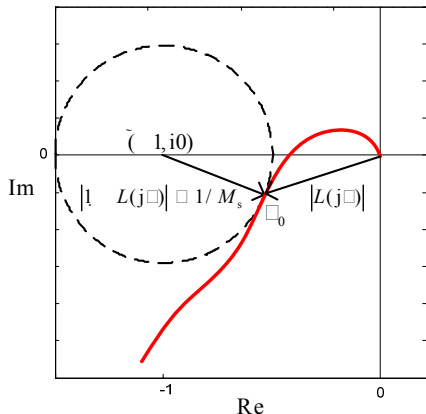
gdje je po definiciji maksimalna osjetljivost  $M_s$

$$M_s = \max_{\omega} |S(i\omega)| = \max_{\omega} \left| \frac{1}{1+L(i\omega)} \right|, \quad (7)$$

i po definiciji maksimalna komplementarna osjetljivost  $M_p$

$$M_p = \max_{\omega} |T(i\omega)| = \max_{\omega} \left| \frac{L(i\omega)}{1+L(i\omega)} \right|. \quad (8)$$

Kao što se da primijetiti funkcije  $S$  i  $T$  zavise samo od funkcije povratnog prenosa  $L$  čija je tipična Nyquistova kriva za stabilne procese prikazana na slici 4.

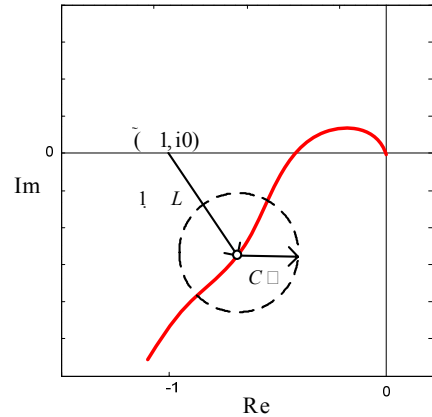


Slika 4. Nyquistov dijagram  $L(i\omega)$  u odnosu na  $M_s$

Tačka u kojoj Nyquistova kriva tangira krug, poluprečnika  $1/M_s$  sa centrom u kritičnoj tački  $(-1, i0)$ , je tačka maksimalne osjetljivosti  $M_s$ . Maksimalna osjetljivost nam

govori koliko je sistem osjetljiv na promjene parametara procesa, jer ako je osjetljivost velika tada male promjene parametara procesa mogu da prouzrokuju nestabilnost sistema.

Da bi dali jedno od fizičkih značenja funkcije komplementarne osjetljivosti posmatrajmo sljedeći dijagram.



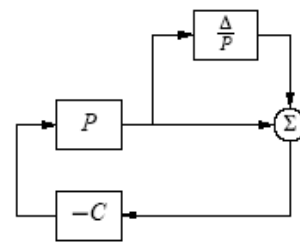
Slika 5. Nyquistov dijagram nominalne  $L = CP$  i neizvjesnost izazvana aditivnom promjenom procesa za  $\Delta$

Neizvjesnost izazvana aditivnom promjenom procesa za  $\Delta$  na osnovu prethodnog dijagrama je

$$|C\Delta| < |1+CP| \quad \text{ili} \quad \left| \frac{\Delta}{P} \right| < \left| \frac{1+CP}{CP} \right| = \frac{1}{|T|}. \quad (9)$$

Na osnovu prethodne relacije (9) funkcija komplementarne osjetljivosti  $T$  je mjera robusnosti sistema upravljanja. Poželjno je da maksimalna komplementarna osjetljivost  $M_p$  bude bliska jedinici, jer tada imamo veću robusnost sistema po svim frekvencijama, odnosno tada je sistem manje osjetljiv na promjenu parametara procesa.

Drugim riječima, na osnovu teorije robusne stabilnosti za neodređenost procesa definisanu sa  $P(1+\delta)$ ,  $\delta = \Delta/P$ , slika 6, ako je robusno stabilan, vrijedi  $\|T\delta\|_{\infty} < 1$ .



Slika 6. Ilustracija neodređenosti procesa data sa  $\delta = \Delta/P$

Ovo su date samo neke važne osobine funkcije osjetljivosti  $S$  i komplementarne osjetljivosti  $T$ .

## 2. Određivanje $\max(T)$ na osnovu funkcije $S$

Dokažimo sljedeću tvrdnju da je

$$M_p = \max_{\omega} \left| \frac{L(i\omega)}{1+L(i\omega)} \right| = \max_{\omega} \left| \frac{1}{1 + \frac{M_p^2 - 1}{M_p^2} L(i\omega)} \right|. \quad (10)$$

*Dokaz:* Neka je  $L(i\omega) = u(\omega) + iv(\omega)$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$ . Tada vrijedi relacija  $\frac{u^2 + v^2}{(u+1)^2 + v^2} = M_p^2$  u stacionarnoj tački  $\omega = \omega_p$ .

Elementarnim matematičkim operacijama ova relacija se može napisati u obliku

$$\frac{1}{(1 + \mu u)^2 + \mu v^2} = M_p^2, \text{ ili } M_p = \frac{1}{|1 + \mu L(i\omega_p)|}, \mu = \frac{M_p^2 - 1}{M_p^2},$$

što odgovara  $M_p = \max_{\omega} \frac{1}{|1 + \mu L(i\omega)|}$ . Ovim je tvrđenje (10) dokazano.

### 3. Određivanje max(S) na osnovu funkcije T

Dokažimo sljedeću tvrdnju da je

$$M_s = \max_{\omega} \frac{1}{|1 + L(i\omega)|} = \max_{\omega} \left| \frac{\eta L(i\omega)}{1 + \eta L(i\omega)} \right|, \eta = \frac{M_s^2}{M_s^2 - 1}. \quad (11)$$

*Dokaz:* Neka je  $L(i\omega) = u(\omega) + iv(\omega)$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$ . Tada vrijedi relacija  $\frac{1}{(u+1)^2 + v^2} = M_s^2$  u stacionarnoj tački  $\omega = \omega_s$ .

Elementarnim matematičkim operacijama ova relacija se može napisati u obliku

$$\frac{\eta(u^2 + v^2)}{(1 + \eta u)^2 + \eta v^2} = M_s^2, \text{ ili } M_s = \frac{|\eta L(i\omega_s)|}{|1 + \eta L(i\omega_s)|}, \eta = \frac{M_s^2}{M_s^2 - 1},$$

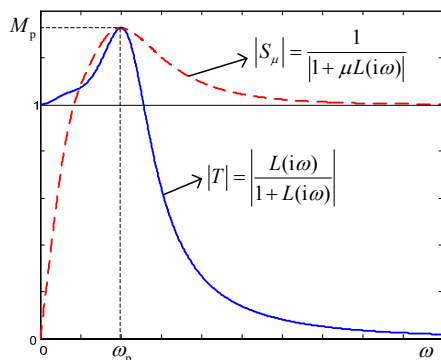
što odgovara  $M_s = \max_{\omega} \left| \frac{\eta L(i\omega)}{1 + \eta L(i\omega)} \right|$ . Ovim je tvrđenje (11) dokazano.

Napomenimo da se funkcije povratnog prenosa  $L$  na osnovu kojih su definisane funkcije  $S$  i  $T$  razlikuju do na konstantu  $\mu$  odnosno  $\eta$ , tj.  $L_{\mu} = \mu L$  ili  $L_{\eta} = \eta L$  za određivanje  $M_s$  na osnovu funkcije komplementarne osjetljivosti  $T$  i obrnuto. Označimo ih sa  $S_{\mu}$  i  $T_{\eta}$ .

Prethodno dokazane relacije (10) i (11) imaju svoju upotrebnost, na primjer pri projektovanju optimalnih regulatora PI/PID na osnovu zadatih parametara  $M_s$  ili  $M_p$  u regulacionoj konturi. Ovo će biti prikazano na nekoliko primjera u narednom poglavlju.

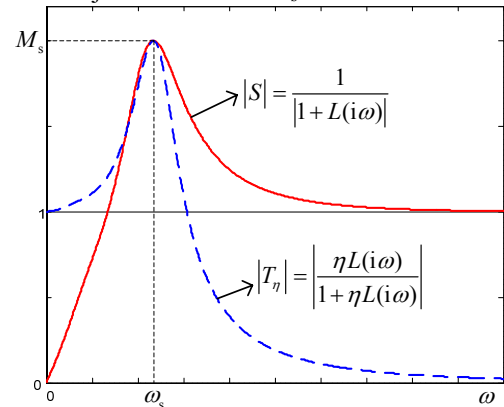
### 4. Grafici funkcija T, S<sub>μ</sub>, S i T<sub>η</sub>

Na sljedećoj slici prikazimo amplitudske karakteristike funkcija  $T$ ,  $S_{\mu}$  u zavisnosti od kružne učestanosti čiji maksimumi su jednaki i iznose  $M_p$ .



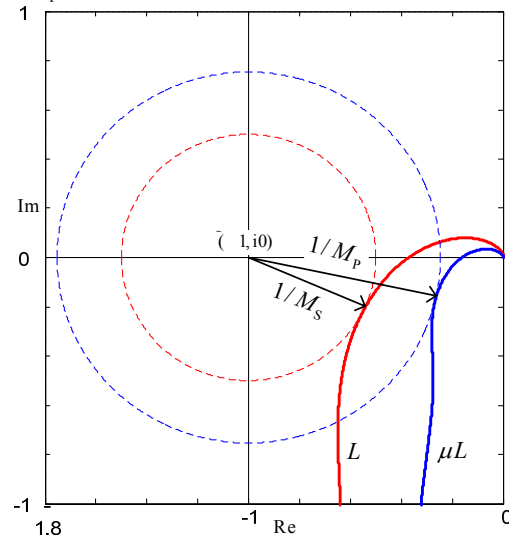
Slika 7. Amplitudske karakteristike funkcija  $S_{\mu} = 1/(1 + \mu L(i\omega))$  i  $T = L(i\omega)/(1 + L(i\omega))$

Na sljedećoj slici prikazimo amplitudske karakteristike funkcija  $S$ ,  $T_{\eta}$  u zavisnosti od kružne učestanosti čiji maksimumi su jednaki i iznose  $M_s$ .



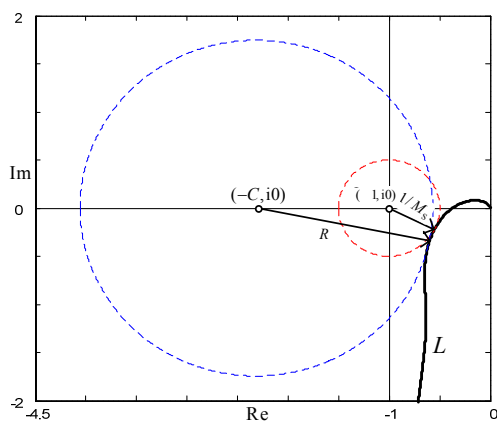
Slika 8. Amplitudske karakteristike funkcija  $S = 1/(1 + L(i\omega))$  i  $T_{\eta} = \eta L(i\omega)/(1 + \eta L(i\omega))$

Interesantno je prikazati Nyquistov dijagram  $L(i\omega)$  i  $\mu L(i\omega)$  u kojoj Nyquistove krive tangiraju krugove, poluprečnika  $1/M_s$  i  $1/M_p$  respektivno sa centrom u kritičnoj tački  $(-1, i0)$ .



Slika 9. Nyquistov dijagram  $L(i\omega)$  i  $\mu L(i\omega)$  u kojoj Nyquistove krive tangiraju krugove, poluprečnika  $1/M_s$  i  $1/M_p$  respektivno sa centrom u kritičnoj tački  $(-1, i0)$

Prethodna slika 9 ima isto značenje kao i naredna slika 10, ali je daleko jasnija jer su oba dijagrama vezana za kritičnu tačku  $(-1, i0)$  u odnosu na krugove, poluprečnika  $1/M_s$  i  $1/M_p$  respektivno sa centrom u toj tački.



Slika 10. Nyquistov dijagram  $L(i\omega)$  u odnosu na  $M_s$  i  $M_p$ , gdje su  $R = M_p / (M_p^2 - 1)$  i  $C = 1 / \mu$

## 5. Primjena funkcija $S$ i $T_\eta$ u projektovanju PI/PID

U ovom poglavlju biće prikazana mogućnost projektovanja optimalnog PI/PID regulatora korišćenjem funkcije  $T_\eta$  u odnosu na standardnu funkciju  $S$  [3-14].

Da bi primijenili sljedeću optimizacionu proceduru za određivanje optimalnih parametara PI regulatora uz relaciju  $L=CP$ , neophodno je definisati funkciju  $F(\omega, k, k_i)$  za dato  $M_s \in [1, 4; 2]$

$$F(\omega, k, k_i) = |1 + 1/(\eta L(j\omega))|^2 - 1/M_s^2. \quad (12)$$

Tada optimizaciona procedura dobija sljedeću formu: Odredimo maksimum kombinovanog kriterijuma  $J_c$

$$\max_{k_i, \omega} J_c = \max_{k_i, \omega} (\beta k_i + (1 - \beta)\omega) \quad (13)$$

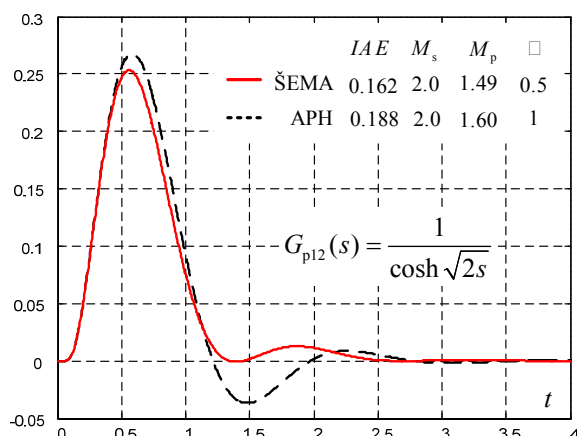
pod ograničenjima

$$F(\omega, k, k_i) = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial F(\omega, k, k_i)}{\partial \omega} = 0, \quad (15)$$

za više vrijednosti težinskog faktora  $\beta$  iz intervala  $\beta \in [0, 1]$ .

Rješavanjem prethodno definisane optimizacione procedure kao optimalni parametri PI regulatora  $k = k_0$ ,  $k_i = k_{i0}$ ,  $\omega = \omega_0$  uzimaju se oni koji daju  $\min_\beta(IAE)$ . Napomenimo da su dobijeni potpuno isti rezultati kao u radu [3] što prikazuje slika 11, gdje je umjesto relacije (12) korišćena funkcija  $S$ , tj.  $F(\omega, k, k_i) = |1 + L(j\omega)|^2 - 1/M_s^2$ . Specijalno za  $\beta=1$ , procedura se svodi kao u [6], korišćenjem relacije (12), odnosno funkcije  $T_\eta$ .



Slika 11. Odzivi na poremećaj za optimalni PI projektovan na osnovu  $T_\eta$

Na sličan način u radovima [4-14] se može koristiti funkcija  $T_\eta$  umjesto funkcije  $S$ .

Moguća prednost korišćenja funkcije  $T_\eta$  je smanjenje vremena računanja potrebnih parametara kao što su  $M_p$  koje se dobija direktno iz  $T_\eta$  za  $\eta=1$ . Na ovaj način je iskorišćena opšta funkcija  $T_\eta$  sa slobodnim parametrom  $\eta$  za računanje  $M_s$  ili  $M_p$ , koje inače moraju da koriste dvije različite funkcije  $S$  i  $T$ .

## 6. Zaključak

Predložena nova parametrizacija funkcija osjetljivosti  $S$  i komplementarne osjetljivosti  $T$  omogućava novi uvid u fizičku predstavu njihovog međusobnog odnosa i mogućnosti primjene u projektovanju i analizi sistema upravljanja. Od posebnog interesa je nova interpretacija  $M_s$  i  $M_p$  krugova u Nyquistovom dijagramu.

## Reference

- [1] K. J. Åström, R.M. Murray, *Feedback Systems*, Version v2.9d 2008. <http://www.cds.caltech.edu/~murray/amwiki>
- [2] H. Panagopoulos and K. J. Åström, "PID Control Design and  $H_\infty$  Loop Shaping", IEEE International Conference on Control Application, pp. 103-108, Hawai'i, 1999.
- [3] T.B. Šekara, M.R. Mataušek, "Optimalno podešavanje PI regulatora zasnovano na maksimizaciji kombinovanog kriterijum  $J_c$ ", INFOTEH, Ref. A-3, Jahorina Mart 2008.
- [4] T.B. Šekara and M.R. Mataušek, "Optimal and robust tuning of the PI controller based on the maximization of the criterion  $J_c$  defined by the linear combination of the integral gain and the closed-loop system bandwidth", Electronics, vol. 12, no. 1, 1st June 2008.
- [5] T.B. Šekara, M.R. Mataušek, "Optimalno podešavanje PID regulatora u frekvencijskom domenu", INFOTEH, Ref. A-6, Jahorina Mart 2009.
- [6] K. J. Åström, H. Panagopoulos and T. Hägglund, "Design of PI controllers based on non-convex optimization", *Automatica*, Vol. 34, pp. 585-601, 1998.
- [7] H. Panagopoulos, K. J. Åström and T. Hägglund, "Design of PID controllers based on constrained optimization", *IEE Proc-Control Theory Appl.*, Vol. 149, pp. 32-40, 2002.
- [8] C. Hwang, C-Y. Hsiao, Solution of non-convex optimization arising in PI/PID control design, *Automatica*, Vol. 38, pp. 1895-1904, 2002.

- [9] B. Kristiansson, B. Lennartson, "Evaluation and simple tuning of PID controllers with high-frequency robustness", *Journal of Process Control* Vol. 16, pp. 91-102, 2006.
- [10] A. Karimi, M. Kunze, R. Longchamp, "Robust controller design by linear programming with application to a double-axis positioning system", *Control Engineering Practice*, Vol. 15, pp. 197-208, 2007.
- [11] T. B. Šekara, M. R. Mataušek, "A simple effective method to obtain a well-tuned PID controller", *Zbornik radova 51 Konf. ETRAN*, Vol. 1, 2007.
- [12] T.B. Šekara, M.R. Mataušek, "Optimalno podešavanje PI/PID regulatora za procese definisane racionalnom funkcijom prenosa", *INFOTEH* Vol. 6, Ref. A-2, p. 6-9, Jahorina Mart 2007.
- [13] T.B. Šekara and M.R. Mataušek, "Optimization of PID controller based on maximization of the proportional gain under constraints on robustness and sensitivity to measurement noise", *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 54, pp.184-189, 2009.
- [14] T.B. Šekara and M.R. Mataušek, "Revisiting the Ziegler-Nichols process dynamics characterization", *J. Process Control* vol. 20, pp. 360-363, 2010.

**CALCULATION OF THE MAXIMUM SENSITIVITY IN  
FEEDBACK SYSTEMS FROM THE COMPLEMENTARY  
SENSITIVITY FUNCTION AND VICE VERSA**

Tomislav B. Šekara, Vidan Govedarica