

# MODELIRANJE I UPRAVLJANJE INVERZNYM KLATNOM U MATLAB/SIMULINK OKRUŽENJU

## MODELING AND CONTROL OF INVERTED PENDULUM IN MATLAB/SIMULINK

Darko Todorović, Miroslav Božić, *Elektronski fakultet Niš*

**Sadržaj** - Balansiranje inverznog klatna koje se nalazi na kolicima koja mogu da se kreću samo po jednom pravcu je klasičan problem u upravljanju. U ovom radu je opisan postupak modelovanja ovakvog sistema u Matlab/Simulink okruženju i kreiranje kontrolera za kreirani model. Zatim je realizovana aparatura, čija je mehanička konstrukcija detaljno opisana, za testiranje dobijenog kontrolera. Kontroler se sastoji iz dva odvojena kontrolera. Prvi kontroler služi da dovede klatno iz normalnog položaja u stabilnoj ravnoteži (okrenuto na dole) do položaja koji je dovoljno blizak položaju kada je klatno okrenuto na gore, dakle u inverznom položaju, kada upravljanje sistemom preuzima drugi kontroler koji ima zadatak da klatno održi u uspravnom položaju.

**Abstract** – *Balancing the inverted pendulum attached to the moving cart is one of the classic problems in control theory. In this paper, the modeling of such system in Matlab/Simulink environment is presented, and appropriate controller was designed. To test the controller, the model of inverted pendulum is created, and the description of mechanical construction is also given in this paper. Controller consists of two independent controllers. First controller brings the pendulum from downwards position to upwards position, where the second controller takes over the control over the pendulum in order to keep it in that position.*

### 1. UVOD

Upravljanje inverznim klatnom, odnosno održavanje klatna u uspravnom položaju na gore, je vrlo često obrađivani primer u priručnicima i udžbenicima o teoriji upravljanja. Jedan ovakav sistem se obično sastoji od kolica koja imaju jedan stepen slobode, za koja je vezano klatno koje prvo treba iz položaja stabilne ravnoteže (klatno okrenuto na dole) prevesti u položaj kada je klatno okrenuto na gore, kada održavanje klatna u dostignuti, inverzni položaj, preuzima poseban kontroler. Jasno je da za ovakav sistem treba definisati dva kontrolera, jedan za podizanje klatna u inverzni položaj, a drugi za održavanje klatna u tom položaju. Da bi dizajnirali odgovarajuće kontrolere, potrebno je ili identifikovati sistem ili napraviti model i ispitati karakteristike sistema na modelu. U ovom radu je opisan način dizajniranja kontrolera prvo na modelu klatna, a zatim fino podešavanje tog modela na realnoj aparaturi. Za kontroler koji podiže klatno u inverzni položaj postoji više različitih strategija od kojih je svaka posebno opisana i date su prednosti i mane.

Za analizu stabilnosti sistema je korišćena metoda geometrijskog mesta korena, i na osnovu te analize utvrđeni su koeficijenti za PID kontroler koji dovodi ovaj sistem u stabilno stanje. Dobijeni kontroler, koji je implementiran u okviru MATLAB Simulink okruženja, je preko MF624 motion control kartice i drajvera za DC motor vezan za aktuator, a povratna sprega je ostvarena preko enkodera koji određuje ugao klatna u odnosu na nulti položaj, a koji je ponovo vezan za motion control karticu.

Na ovako konstruisan sistem je veoma lako uvesti džojstik, koji će služiti da čovek upravlja prevodjenjem klatna iz položaja na dole u uspravni položaj i održavanje klatna u tom položaju. S obzirom da je poznat model klatna, u džojstik se može implementirati force feedback algoritam, koji će korisniku omogućiti da ostvari realnu spregu sa klatnom, odnosno moguće je preneti sve sile i inerciju klatna i kolica na džojstik preko koga čovek upravlja sistemom. Na osnovu snimljenih upravljačkih ulaza koje generiše čovek za kontrolu ovog sistema, moguće je dizajnirati neki novi algoritam za upravljanje ili poboljšati postojeće. Ovo je predmet budućih istraživanja koja će se obaviti uz pomoć ove aparature.

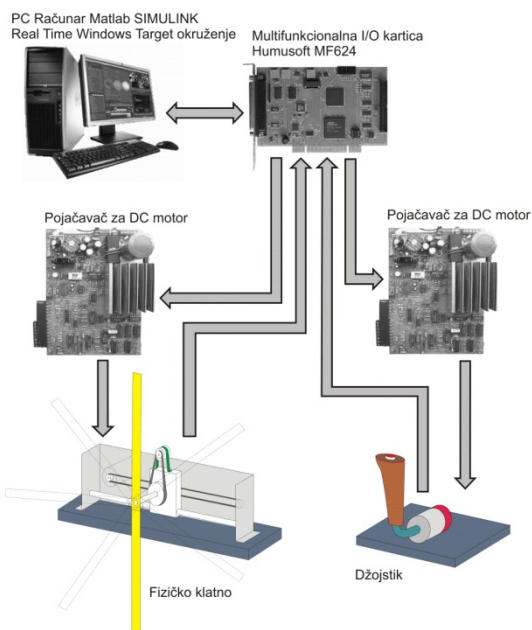
U narednim poglavljima je dat hardverski opis sistema, izvođenje modela sistema, analiza metodom geometrijskog mesta korena i dizajniranje odgovarajućih kontrolera. Na kraju su upoređeni rezultati dobijeni u simulaciji i rezultati dobijeni na realnom sistemu.

### 2. OPIS HARDVERA SISTEMA ZA UPRAVLJANJE INVERZNYM KLATNOM

Na Sl.1. je prikazana blok šema komponenata koje čine sistem sa inverznim klatnom. Da bi razvoj algoritma za upravljanje maketom bio što jednostavniji kao i da bi kasnija nadogradnja sistema sa više senzora i aktuatora bila moguća, kao interfejs između računara, na kome se izvršava kontroler u okviru MATLAB Simulink okruženja, i drajvera za motor i

enkodera upotrebljena je multifunkcionalna I/O kartica HMUSOFT MF624. Bitne karakteristike ove kartice su:

- 8 analognih ulaza sa 14 – to bitnom A/D konverzijom,
- 8 analognih izlaza sa 14 – to bitnom D/A konverzijom,
- 8 digitalnih ulaza,
- 8 digitalnih izlaza,
- 4 diferencijalna enkoderska ulaza,
- 4 brojača / tajmera,
- Mogućnost povezivanja sa Real Time Windows Target – om i MATLAB Simulink razvojnim okruženjem.



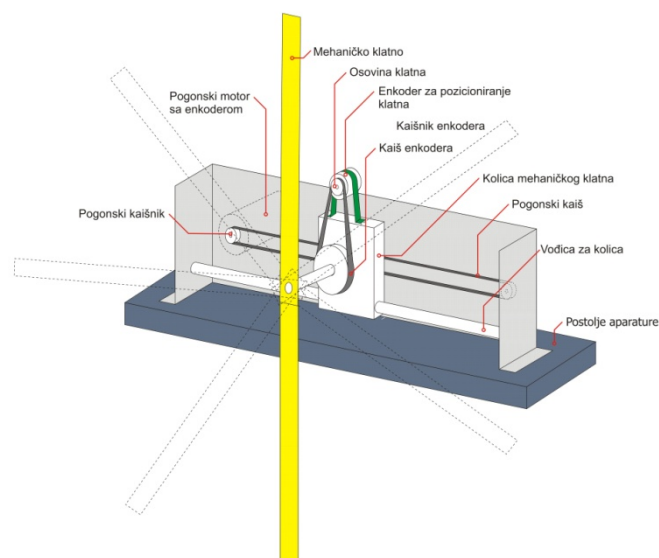
Sl 1. Blok šema makete i veze između komponenata

Kretanje mehaničkih komponenata sistema, džojstika i klatna, ostvaruje se pomoću dva MAXON DC motora sa enkoderima. Prvi motor je iskorišćen za realizaciju džojstika sl.3 dok se drugim motorom, čija je osovina preko kaišnika i kaiša spregnuta sa kolicima koja se kreću po horizontalnoj šini sl.2, čime se rotaciono kretanje motora pretvara u translatorno kretanje kolica. Za pretvaranje rotacionog kretanja, izazvanog izvođenjem palice džojstika iz ravnotežnog položaja, u translatorno kretanje makete po horizontalnoj osi koriste se dva DC pojačavača drajvera sl.1.

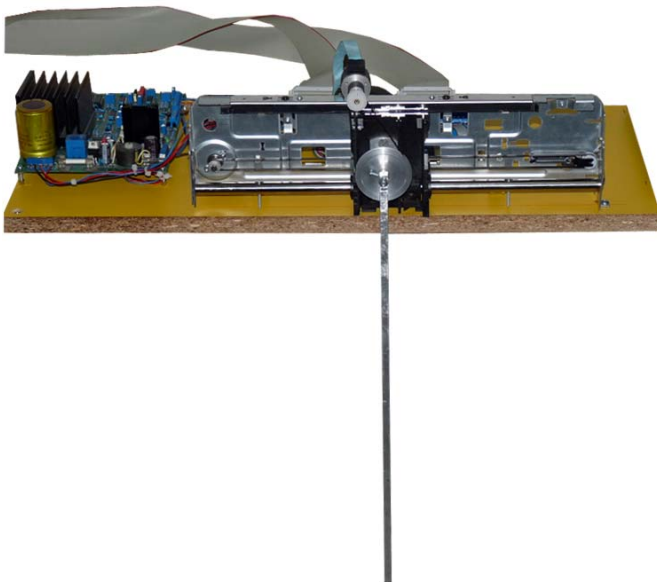
Kako bi se sakupili podaci o načinu interakcije čoveka i mašine potrebno je odrediti u kom položaju se u svakom trenutku nalaze palica džojstika, kolica o koja je okačeno klatno, i položaj samog fizičkog klatna. Kao senzori položaja džojstika, kolica i fizičkog klatna upotrebljeni su HEDL 5540 enkoderi. Informacija dobijena sa džojstika sl.3, izazvana poremećajem od strane čoveka se preko enkodera prenosi do Humusoft MF624 interfejs kartice i MATLAB Simulink okruženja sl.1. Estimacijom brzine i ubrzanja dobija se upravljački signal koji se opet putem Humusoft MF624 kartice prenosi do pojačavača koji upravlja radom DC motora

za pokretanje kolica sl.2. Položaj kolica dobija se sa enkodera koji je povezan na osovinu pogonskog motora. Translatorsno kretanje kolica prouzrokuje mehaničke oscilacije klatna, a informacija o položaju klatna se dobija očitavanjem signala sa enkodera. Na ovaj način je ostvarena upravljačka povratna sprega između komponenata sistema.

Maketa sistem sa inverznim klatnom prikazana je na sl.2, a sastoji se od: pogonskog motora sa enkoderom, pogonskog kaiša i kaišnika, vođice za kolica, kolica mehaničkog klatna, enkodera za pozicioniranje mehaničkog klatna i štapa koji predstavlja klatno. Pogonski motor, upravljani preko PC računara, spregnut je sa kolicima mehaničkog klatna preko sistema kaiša i kaišnika. Kolica mehaničkog klatna su sa štapom koji predstavlja klatno spregnuta osovinom, a mehaničke oscilacije klatna se sistemom kaiša i kaišnika prenose do enkodera za pozicioniranje klatna sl.2. Ovakvom mehaničkom konfiguracijom makete rotacija osovine motora prouzrokuje translatorsno kretanje kolica mehaničkog klatna čime se klatno izvodi iz ravnotežnog položaja tj. dolazi do oscilovanja.



Sl. 2 Mehanička konstrukcija makete fizičkog klatna



Sl.3 Realni izgled makete za upravljanje fizičkim klatnom

- $b$  – koeficijent trenja kolica
- $L$  – dužina klatna
- $I$  – moment inercije klatna
- $\theta$  - ugao klatna u odnosu na vertikalu

Sumiranjem svih sila koje deluju na kolica i klatno, i prevođenjem tih jednačina u odgovarajući oblik, dobija se već poznata funkcija prenosa ovakvog sistema, za slučaj da je koeficijent trenja jednak nuli (1).

$$\frac{\Phi(s)}{U(s)} = \frac{K_p}{\frac{s^2}{A_p^2 - 1}} \quad (1)$$

gde je

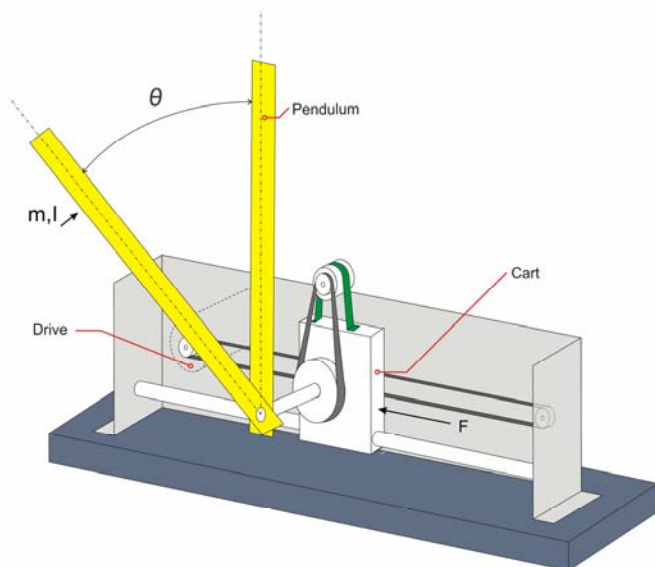
$$K_p = \frac{1}{(M + m)g} \quad (2)$$

i

$$A_p = \pm \sqrt{\frac{(M + m)mgl}{(M + m)(l + ml^2) - (ml)^2}} \quad (3)$$

### 3. MODLIRANJE SISTEMA

Na Sl.4. je prikazana pojednostavljena šema sistema sa inverznim klatnom na kojoj su obeležene sve relevantne veličine koje su potrebne za kreiranje modela ovog sistema.



Slika 4. Pojednostavljeni prikaz sistema sa klatnom i bitnim fizičkim veličinama za modeliranje

Kako bi odredili samo prenosnu funkciju sistema kolica i klatna potrebne su nam sledeće veličine:

- $M$  – masa kolica
- $m$  – masa klatna

Ovo je linearizovana aproksimacija transfer funkcije inverznog klatna (3).

Mehanizam koji pokreće kolica takođe ima svoju prenosnu funkciju koja se mora uzeti u obzir prilikom modeliranja sistema. Ovaj mehanizam se, kako je već rečeno, sastoji od DC motora, kaišnika koji je vezan za izlaznu osovinu motora, kaiša koji vuče kolica i samih kolica. Bitni parametri za modeliranje ovog dela sistema su:

- $R$  – prečnik kaišnika
- $\tau_m$  - vremenska konstanta motora
- $K_m$  - pojačanje motora
- $K_F$  - pojačanje povratne petlje

Ponovo ne ulazeći u detalje oko izvođenja dolazimo do prenosne funkcije mehanizma koji pokreće kolica u sledećem obliku:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_m \frac{(M + m)rs}{(\tau_m s + 1)} \quad (4)$$

Na osnovu prethodnog se može izvesti i prenosna funkcija celokupnog sistema koja ima oblik:

$$\frac{\Phi(s)}{E(s)} = K \frac{s}{(\tau_m s + 1) \left( \frac{s^2}{A_p^2} - 1 \right)} \quad (5)$$

gde je:

$$K = K_F K_P K_M r(M + m) \quad (6)$$

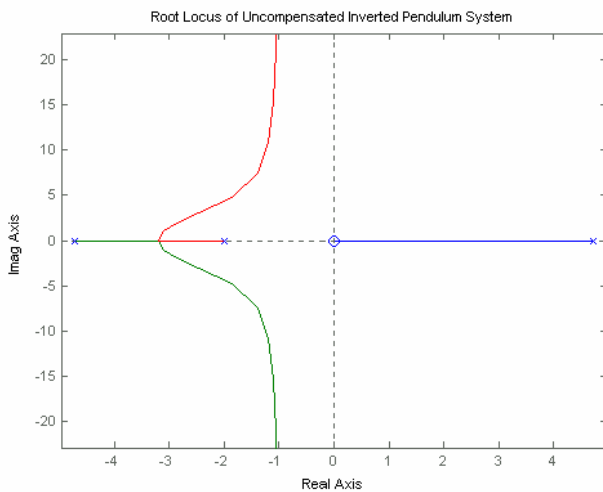
$E(s)$  je vrednost signala greške i

$\Phi(s)$  je ugao klatna u odnosu na vertikalnu.

Pošto smo dobili funkciju prenosa celokupnog sistema možemo pristupiti analizi stabilnosti sistema i dizajniranju pogodnog kompenzatora za stabilizaciju klatna oko vertikalnog položaja, koji zadovoljava postavljene zahteve. Za analizu sistema izabrana je metoda geometrijskog mesta korena.

#### 4. ANALIZA NEKOMPENZOVANOG SISTEMA I DIZAJNIRANJE KOMPENZATORA

Za određivanje potrebnog kompenzatora i njegovih karakteristika potrebno je prvo odrediti GMK dijagram nekompenzovanog sistema. Na osnovu prenosne funkcije u Matlabu se lako dobija GMK nekompenzovanog sistema koji u ovom slučaju izgleda kao na Sl. 5.



Slika 5. GMK nekompenzovanog sistema

Na ovom dijagramu se vidi da sistem ima jedan pol u desnoj poluravni što znači da je nestabilan i da je potrebno uvesti odgovarajući kompenzator. Za dizajniranje kompenzatora u Matlabu se koristi Siso Design Tool (sisotool). Za dizajniranje kompenzatora u ovom alatu potrebna je prenosna funkcija nekompenzovanog sistema i potrebno je definisati parametre koje kompenzovani sistem treba da zadovoljava. U ovom slučaju to su: vreme smirenja od 0.5s, preskok treba da bude manji od 20%, prigušenje  $\zeta > 0.5$  i greška u ustaljenom stanju mora biti jednaka nuli. Da bi ovo postigli moramo da dodamo jedan pol u nuli kako bi poništili uticaj nule koja postoji kod nekompenzovanog sistema, i da dodamo dve nule u levoj poluravni kako bi se dve grane GMK koje su se završavale u beskonačnim nulama završavale u konačnim kako bi sistem bio stabilan. Ovo sve ukazuje da nam je potreban PID tip kontrolera. Posle dodavanja PID kontrolera i određivanja pojačanja koje

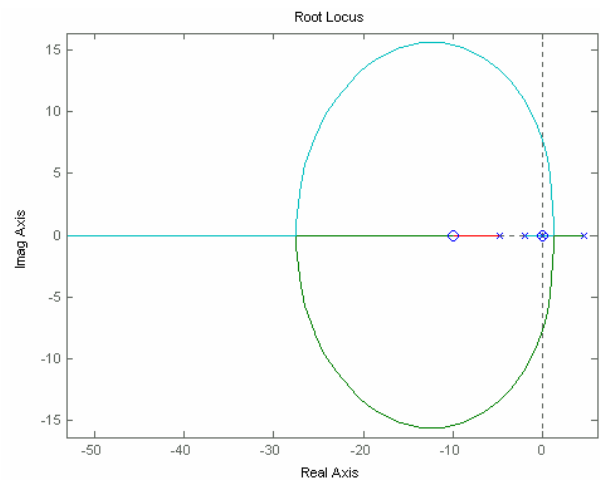
odgovara zahtevima dolazi se do prenosne funkcije kompenzatora koja ima oblik:

$$G_C = 8 * \left( \frac{s^2 + 20s + 100}{s} \right) \quad (7)$$

Prethodna prenosna funkcija ukazuje na potrebne parametre PID komenzatora koji treba uvesti u sistem kako bi bio stabilan. Parametri su sledeći:

$$K_C = 8, K_p = 20, K_I = 100 \text{ i } K_d = 1.$$

Nakon određivanja kompenzatora i njegovih parametara GMK kompenzovanog sistema izgleda kao na Sl.6.



Slika 6. GMK kompenzovanog sistema

U sledećem poglavlju će biti opisani kontroleri za podizanje klatna iz položaja stabilne ravnoteže (klatno okrenuto na dole) u oblast oko željenog inverznog položaja, odakle upravljanje preuzima već opisani kontroler.

#### 5. KONTROLER ZA PODIZANJE KLATNA

Postoji nekoliko različitih pristupa za podizanje klatna u inverzni položaj, ali se dva pristupa najčešće sreću.

Prvi se zasniva na tome da se kontroliše količina energije koja se preda klatnu. Kontroler predaje sistemu energiju sve dok sistem ne apsorbuje količinu energije koju ima kad se klatno nalazi u inverznom položaju. Ukupna količina energije koju kontroler treba da preda ovom sistemu jednaka je razlici potencijalnih energija klatna kada se ono nalazi u položaju na dole i potencijalne energije koju poseduje kada se nalazi u inverznom položaju. Kada se klatno nađe u blizini uspravnog položaja kontrolu preuzima kontroler za balansiranje koji je već opisan. Ukupna energija klatna u svakom trenutku može se predstaviti na sledeći način:

$$E = m_p g l \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{\theta}}{\omega_0} \right)^2 + \cos \theta - 1 \right) \quad (8)$$

gde je:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{m_p g l}{4I}} \quad (9)$$

i  $m_p$  je masa klatna,  $l$  je polovina dužine klatna i  $I$  je inercija.

Iz prethodnog se vidi da je energija klatna funkcija ugla i ugaone brzine klatna. Zakon upravljanja koji je primenjen da bi se dostigla željena energija je:

$$a = sat_v \left( k (E - E_0) \right) sign(\dot{\theta} \cos \theta) \quad (10)$$

gde je  $k$  parametar dizanja, a  $E_0$  je energija koju želimo da dostignemo. Izlaz iz kontrolera je ubrzanje tačke za koju je vezano klatno koje se može pretvoriti u ulazni napon na motoru po zakonu:

$$F \approx Ma \quad (11)$$

Funkcija  $sat_v$  (9) je definisana kao maksimalna vrednost napona koji se predaje motoru koji pomera kolica.

Drugi pristup je mnogo jednostavniji za implementaciju, ali je i njegova efikasnost manja. Ovaj kontroler motoru koji pokreće kolica saopštava konstantnu brzinu u odgovarajućem pravcu i na taj način pomera kolica napred nazad. Kada klatno dostigne željeni položaj, kontrolu preuzima kontroler za balansiranje. Drugi kontroler je poznat i pod nazivom heuristic controller.

Ovaj kontroler je dizajniran tako da određuje pravac i trenutak u vremenu kada kolica treba da se kreću u zavisnosti od trenutnog stanja sistema. Napon na motoru, odnosno brzina kretanja kolica, se za svaki sistem određuje eksperimentalno. Ovaj kontroler će pokretati kolica napred nazad svaki put kada klatno prolazi kroz položaj kada je okrenuto na dole (početni položaj). Pravac kretanja kolica će zavisiti od smera kretanja klatna kada prolazi kroz taj položaj, i biće suprotan u odnosu na taj smer. Ovaj kontroler se u potpunosti oslanja samo na ugao klatna koje je lako izmeriti. Zbog jednostavnog dizajna, mi smo izabrali ovaj kontroler za podizanje klatna u inverzni položaj.

## LITERATURA

- [1] *Inverted pendulum: Analysis, Design and Implementation*, IEEE Visionaries, Instrumentation and Control Lab, the institute of Industrial Electronics Engineering, Karachi, Pakistan
- [2] <http://www.livephysics.com/physics-videos/tools/matlab-models-of-an-inverted-pendulum-on-a-cart.html>, januar, 2010.
- [3] *Introduction to Simulink with Engineering Applications*, Steven T. Karris, Orchard Publications, 2006.